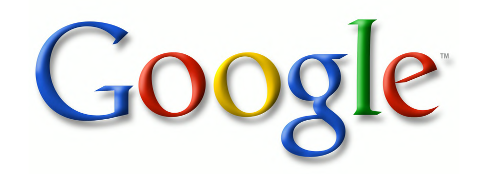
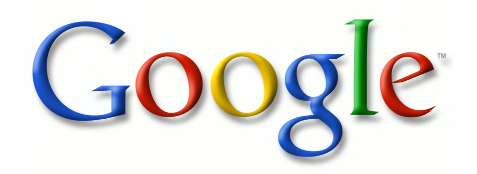
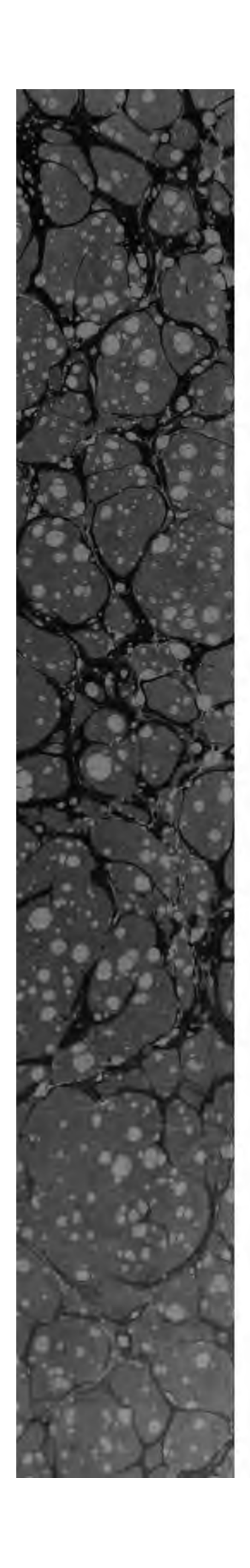
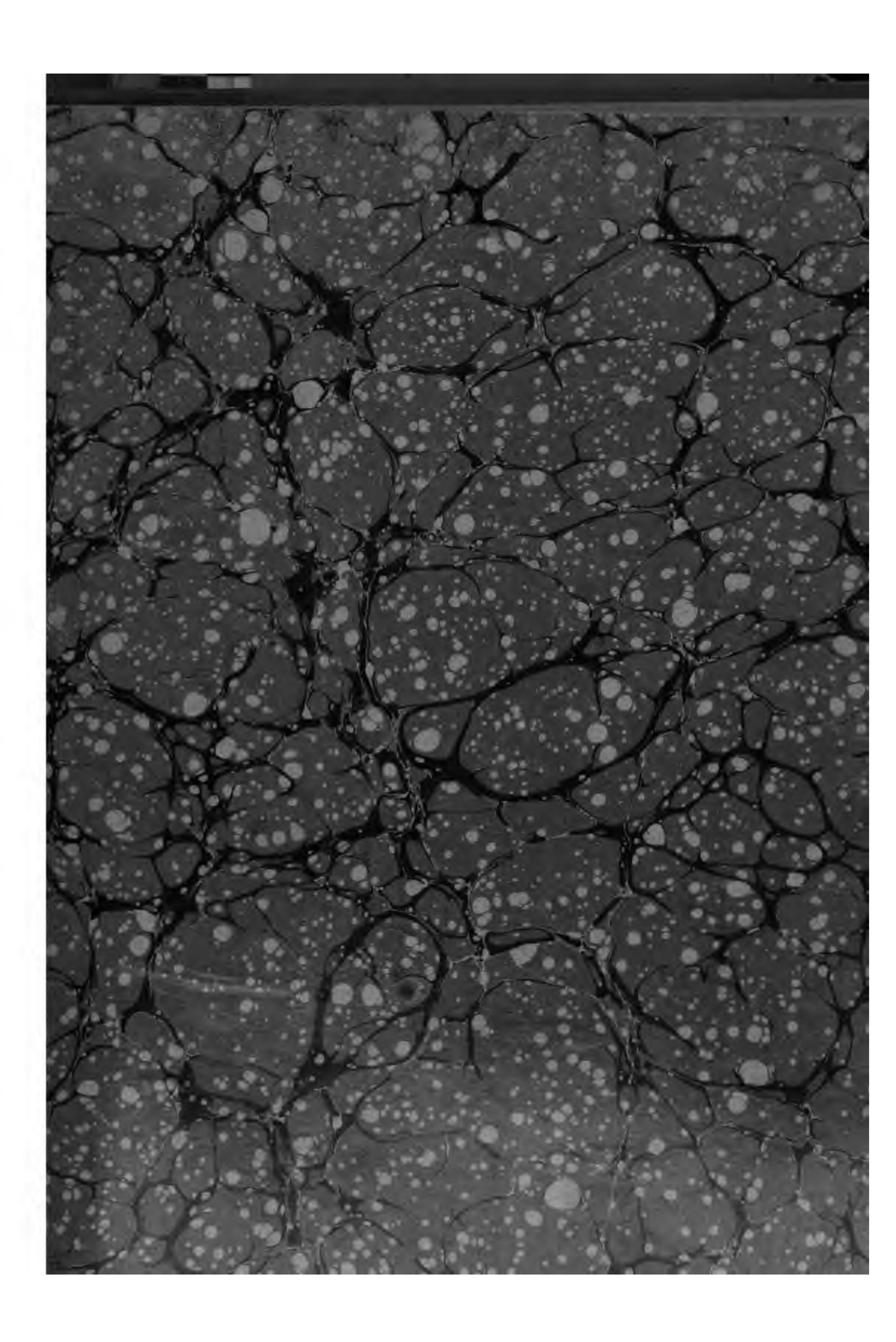
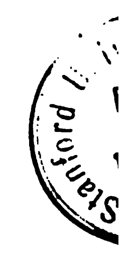












Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

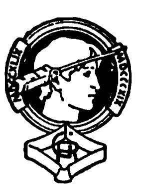
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 132.

Heft I.

Ausgegeben den 24. November.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1906.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 132. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 132.

In vier Heften.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1907.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 132.

Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion.

Von Herrn *Georg Landsberg* in Breslau.

Eine in einem gegebenen Rationalitätsbereich irreduktibele ganze Funktion kann nach Erweiterung dieses Bereiches in Faktoren zerfallen, und wenn in dieser Weise eine Gleichung auf eine andere einwirkt, so wirkt auch die zweite Gleichung reduzierend auf die erste. Die vorliegende Arbeit setzt sich zunächst zur Aufgabe, die hier auftretenden Gesetzmäßigkeiten vollständig von *den Gruppen der beiden Gleichungen aus* zu diskutieren und auf dieser Grundlage die auftretenden Reziprozitätsbeziehungen festzustellen.

Ganz analoge Verhältnisse walten ob, wenn man die Frage behandelt, unter welchen Umständen eine gegebene ganze irreduktibele Funktion rücksichtlich eines gegebenen Primmoduls reduktibel werden kann. Die Untersuchung kann alsdann nach denselben Methoden geführt werden, vorausgesetzt nur, daß sie nicht gerade an eine beliebige, sondern an die allgemeinste in Betracht kommende Gleichung des vorgelegten Körpers, die sogenannte Fundamentalgleichung anknüpft. Da aber die Zerlegung der Fundamentalgleichung rücksichtlich eines Primmoduls auch ganz unmittelbar die Zerlegung dieses Primmoduls in Primideale ergibt, so findet man auf diesem Wege die Bestimmung der Primideale eines beliebigen Körpers aus der Gruppe des zugehörigen *Galois*schen Körpers, eine Untersuchung, die zuerst Herr *Dedekind* durchgeführt, deren Resultate er aber nur ganz kurz und abrißweise bekannt gegeben hat.*)

Der Einfachheit der Ausdrucksweise halber führe ich die Entwicklung nur für Zahlkörper, es ist aber evident, daß sie in ganz gleicher Weise für beliebige Rationalitätsbereiche gilt.

*) *R. Dedekind*, Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894, S. 272—277.

1. Die beiden ganzzahligen Funktionen

$$(1.)\quad \begin{cases} A(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = a_0 (x-\alpha)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{m-1}) \quad \text{und} \\ B(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = b_0 (x-\beta)(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n-1}) \end{cases}$$

seien im Körper R der rationalen Zahlen irreduktibel. Um die Einwirkung untersuchen zu können, welche die beiden Gleichungen auf einander ausüben, bilden wir zuvörderst den Körper

$$(2.)\qquad G = R(\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}, \beta, \beta_1, \dots \beta_{n-1}),$$

welcher aus R durch Adjunktion aller Wurzeln von $A=0$ und $B=0$ entsteht. Dieser Körper ist ein *Galois*scher, weil er mit seinen konjugierten identisch ist; ist also r sein Grad und ξ eine Zahl, die ihn erzeugt, ξ_1, $\xi_2, \dots \xi_{r-1}$ ihre konjugierten Zahlen, so ist auch

$$(2^a.)\qquad G = R(\xi) = R(\xi_1) = \cdots = R(\xi_{r-1}).$$

Jeder *Galois*sche Körper G des Grades r besitzt bekanntlich eine Gruppe von r Abbildungen in sich,

$$(3.)\qquad \mathfrak{R} = (\mathfrak{g}_0 = 1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots \mathfrak{g}_{r-1})$$

derart, daß durch die Abbildung $\mathfrak{g}_h$ die Zahl ξ in ξ_h und eine beliebige Größe $\varphi(\xi)$ des Körpers in $\varphi(\xi_h)$ übergeführt wird; für diesen Prozeß diene die Bezeichnung

$$\varphi(\xi)|\mathfrak{g}_h = \varphi(\xi_h).$$

Ist nun U irgend ein Unterkörper von G, so gibt es eine bestimmte Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$, deren Operationen alle Zahlen von U in Ruhe lassen, und umgekehrt bestimmt eine jede Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$ einen Körper U der Zahlen, welche bei den Abbildungen von $\mathfrak{U}$ festbleiben. Man kann daher sagen, daß der Körper U zur Gruppe $\mathfrak{U}$ *gehört*; ist $r = su$ und u der Grad, s der Index der Untergruppe, so ergibt die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in Nebengruppen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{U}\mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{U}\mathfrak{g}_{s-1},$$

und es nimmt somit eine den Körper U erzeugende Zahl s verschiedene Werte an; es ist also s der Grad des Unterkörpers. Ist $\mathfrak{D}$ wieder ein Teiler von $\mathfrak{U}$ vom Grade d und in bezug auf $\mathfrak{U}$ vom Index t, also $u = dt$, so gehört zu $\mathfrak{D}$ ein Körper D, welcher U enthält und in Beziehung auf U

den Grad t, in Beziehung auf R den Grad st hat. Es gehört also zur engeren Gruppe der umfassendere Bereich, insbesondere zu der weitesten hier in Betracht kommenden Gruppe $\mathfrak{R}$ der Körper R der rationalen Zahlen und zur engsten Gruppe $\mathfrak{g}_0 = 1$ der *Galois*sche Körper G selbst. Sind allgemeiner $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei Untergruppen von $\mathfrak{R}$, U und V die zu ihnen gehörigen Körper, $\mathfrak{D}$ der größte gemeinsame Teiler oder der Durchschnitt der beiden Gruppen, so ist der zu $\mathfrak{D}$ gehörige Körper D der kleinste Körper, welcher U und V enthält, und ist somit der aus U und V komponierte Körper oder das kleinste gemeinschaftliche Multiplum von U und V, also der Körper $R(\alpha, \beta)$, der aus R durch Adjunktion der die Körper U und V erzeugenden Zahlen α und β entsteht.

2. Für das hier gestellte Problem ist eine Zerlegung einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{R}$ nach zweien ihrer Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von grundlegender Bedeutung, welche zuerst von Herrn *Frobenius**) angewendet worden zu sein scheint und über welche hier das Erforderliche beigebracht werden soll. Ist $\mathfrak{g}$ ein beliebiges, aber bestimmtes Element von $\mathfrak{R}$, so verstehen wir unter dem Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{g}\mathfrak{B}$ den Komplex der Substitutionen von der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Elemente von $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ durchläuft. Sind a und b die Grade der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so sind die so erhaltenen ab Operationen nicht notwendig alle von einander verschieden, sondern damit zwei Substitutionen des Komplexes $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{g}\mathfrak{b}'$ einander gleich sind, ist es notwendig, daß

$$\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{a})\,\mathfrak{g} = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}$$

ist; diese Substitution gehört also sowohl der Gruppe $\mathfrak{B}$, als auch der transformierten Gruppe $\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}$, also auch dem Durchschnitt beider

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}, \mathfrak{B})$$

an. Ist umgekehrt $\mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}$ ein Element von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}}$ und setzt man

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}^{-1}\mathfrak{g}^{-1}, \qquad \mathfrak{b}' = \mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{b},$$

so gehört $\mathfrak{a}'$ ebenfalls zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}'$ zu $\mathfrak{B}$ und es ist

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{g}\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b}.$$

*) *G. Frobenius*, Über die Kongruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. Dieses Journal Bd. 101, S. 273—299 (1886), vergl. auch die vorher zitierte Note von *Dedekind*.

Ist also $d_{\mathfrak{g}}$ der Grad der Gruppe $\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}}$, so werden immer $d_{\mathfrak{g}}$ Operationen des Komplexes $\mathfrak{A}\mathfrak{g}\mathfrak{B}$ einander gleich, und die Anzahl der in ihm enthaltenen verschiedenen Elemente ist gleich $\frac{ab}{d_{\mathfrak{g}}}$.

Zwei derartige Komplexe $\mathfrak{A}\mathfrak{g}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{g}_1\mathfrak{B}$ enthalten entweder dieselben Substitutionen oder sie haben kein Element gemeinsam. Denn ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{g}_1\mathfrak{b}',$$

so ist $\mathfrak{g}_1$ ein Element von $\mathfrak{A}\mathfrak{g}\mathfrak{B}$ und die beiden Komplexe sind somit identisch. Man kann daher die ganze Gruppe $\mathfrak{R}$ durch eine bestimmte Zahl derartiger Komplexe

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\mathfrak{g}_1\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\mathfrak{g}_2\mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{A}\mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{B}$$

erschöpfen, dann ist

$$(4.) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_2\mathfrak{B} + \cdots \mathfrak{A}\mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{B},$$

und wenn die größten gemeinsamen Teiler

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),\ \mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_1, \mathfrak{B}),\ \mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{g}_2^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_2, \mathfrak{B}), \ldots \mathfrak{D}_{k-1} = (\mathfrak{g}_{k-1}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_{k-1}, \mathfrak{B})$$

resp. die Gradzahlen

$$d,\ d_1,\ d_2, \ldots d_{k-1}$$

besitzen, so ist

$$(5.) \qquad r = \frac{ab}{d} + \frac{ab}{d_1} + \frac{ab}{d_2} + \cdots + \frac{ab}{d_{k-1}}.$$

Die Reihenfolge der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist bei dieser Zerlegung nicht gleichgültig; bildet man aber zu jeder Operation von $\mathfrak{R}$ die inverse, so entspricht dem Komplexe $\mathfrak{A}\mathfrak{g}\mathfrak{B}$ der Komplex $\mathfrak{B}\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{A}$, folglich ist auch

$$(6.) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}_2^{-1}\mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{B}\mathfrak{g}_{k-1}^{-1}\mathfrak{A},$$

und die Anzahl k der auftretenden Produkte und die zu ihnen gehörigen Zahlen $d, d_1, \ldots d_{k-1}$ bleiben also von dieser Änderung der Reihenfolge unberührt. Durch die Zerlegung (4.) wird die Gruppe $\mathfrak{R}$ in eine Anzahl von Komplexen $\mathfrak{A}\mathfrak{g}_{\varkappa}\mathfrak{B}$ geschieden, von denen jeder eine Anzahl gleichartiger Elemente enthält und durch eines seiner Elemente, z. B. durch $\mathfrak{g}_{\varkappa}$ selbst vollständig charakterisiert werden kann. Aus diesem Grunde heißen auch die Elemente

$$\mathfrak{g}_0 = 1,\ \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2, \cdots \mathfrak{g}_{k-1}$$

ein Repräsentantensystem der Gruppe $\mathfrak{R}$ nach ihren Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Es ist nun bemerkenswert, daß, wenn $\mathfrak{A}$ durch eine transformierte Gruppe

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{k}$$

ersetzt wird, die neue Zerlegung und das neue Repräsentantensystem aus den vorherigen abgeleitet werden können. In der Tat, da

$$\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B} = \mathfrak{k}\mathfrak{A}'(\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_\varkappa)\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$$

ist, so folgt, daß auch die Zerlegung

$$(7.)\quad \mathfrak{N} = \mathfrak{A}'\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_1)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_2)\mathfrak{B} + \cdots + \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_{k-1})\mathfrak{B}$$

gilt und daß

$$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{k}^{-1},\ \mathfrak{g}_1' = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2' = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_{k-1}' = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}_{k-1}$$

ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{N}$ modulis $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ bilden. Auch beim Übergang von der Gleichung (4.) zu (7.) bleibt der Komplex der Zahlen $d, d_1, d_2, \ldots d_{k-1}$ ungeändert.

Tritt an die Stelle der Gruppe $\mathfrak{B}$ eine transformierte Gruppe

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{h}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{h},$$

so ergibt sich die analoge Gleichung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\mathfrak{h}\mathfrak{B}' + \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_1\mathfrak{h})\mathfrak{B}' + \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_2\mathfrak{h})\mathfrak{B}' + \cdots + \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{h})\mathfrak{B}',$$

und es bilden also

$$\mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_1\mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_2\mathfrak{h}, \ldots \mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{h}$$

ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{N}$ modd. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}'$.

Die Komplexe $\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B}$, welche in Gleichung (4.) auftreten, sind auch einer Darstellung fähig, in welcher jedes Element nur einmal erscheint. Man setze nämlich, da der Grad $d_\varkappa$ von $\mathfrak{D}_\varkappa$ in a und b aufgeht,

$$(8.)\qquad a = d_\varkappa \nu_\varkappa, \qquad b = d_\varkappa \mu_\varkappa,$$

dann besitzt $\mathfrak{D}_\varkappa$ in $\mathfrak{B}$ $\mu_\varkappa - 1$, in $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa$ $\nu_\varkappa - 1$ Nebengruppen. Demgemäß gelten Zerlegungen der Form:

$$(9^a.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B} = \mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{D}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)} + \mathfrak{D}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(2)} + \cdots + \mathfrak{D}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa - 1)}, \\ \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa = \mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{a}_\varkappa^{(1)}\mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{a}_\varkappa^{(2)}\mathfrak{D}_\varkappa + \cdots + \mathfrak{a}_\varkappa^{(\nu_\varkappa - 1)}\mathfrak{D}_\varkappa, \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{b}_\varkappa^{(h)}$ geeignete Elemente von $\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{a}_\varkappa^{(g)}$ Elemente von $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa$ bedeuten. Folglich ist

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B} &= \mathfrak{g}_\varkappa \Sigma\, \mathfrak{a}_\varkappa^{(g)} \mathfrak{D}_\varkappa \mathfrak{b}_\varkappa^{(h)} \qquad \binom{g=0,1,\dots \nu_\varkappa-1}{h=0,1,\dots \mu_\varkappa-1} \\ &= \mathfrak{g}_\varkappa(\mathfrak{B} + \mathfrak{a}_\varkappa^{(1)}\mathfrak{B} + \mathfrak{a}_\varkappa^{(2)}\mathfrak{B} + \cdots + \mathfrak{a}_\varkappa^{(\nu_\varkappa-1)}\mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa \mathfrak{b}_\varkappa^{(1)} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa \mathfrak{b}_\varkappa^{(2)} + \cdots + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa \mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)}, \end{aligned}\right.$$

Zerlegungsgleichungen, in denen jedes der $\frac{ab}{d_\varkappa} = d_\varkappa \mu_\varkappa \nu_\varkappa$ Elemente des Komplexes $\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B}$ nur einmal vorkommt.

3. Kehren wir jetzt zu den beiden irreduktibelen Gleichungen m-ten und n-ten Grades $A(x)=0$ und $B(x)=0$ in (1.) zurück und bilden wir mit ihren Wurzeln den *Galois*schen Körper G in (2.), der die r Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{R}$ in (3.) gestattet, so mögen die Körper $R(\alpha)$ und $R(\beta)$ zu den Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gehören, deren Gradzahlen wieder a und b seien; dann ist

$$(10.)\qquad r = ma = nb$$

und der Körper $R(\alpha, \beta)$ gehört zur Gruppe $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ des Grades d. Behält man also die im vorigen Artikel gegebenen Bezeichnungen bei, so hat der Körper $R(\alpha, \beta)$ in Beziehung auf R den Grad $\frac{r}{d} = \nu m = \mu n$, in Beziehung auf $R(\alpha)$ den Grad $\frac{a}{d} = \nu$, in Beziehung auf $R(\beta)$ den Grad $\frac{b}{d} = \mu$. Nach Adjunktion von β genügt also α einer irreduktibelen Gleichung des Grades μ, welche durch

$$\mathsf{A}(x, \beta) = 0$$

bezeichnet sein möge.

Um nun zu erkennen, welche Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $A(x)=0$ außer $x=\alpha$ der Gleichung $\mathsf{A}(x, \beta)=0$ genügen, verfahren wir folgendermaßen. Auf die Gleichung

$$\mathsf{A}(\alpha, \beta) = 0$$

dürfen wir alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{B}$ anwenden, ohne daß der Parameter β sich ändert. Nun ist zufolge der Gleichungen (9.) und (9^a.)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{A}\mathfrak{b}^{(2)} + \cdots + \mathfrak{A}\mathfrak{b}^{(\mu-1)},$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{(2)} + \cdots + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{(\mu-1)},$$

und es bleibt α bei den Substitutionen von $\mathfrak{D}$ ungeändert, geht hingegen bei den Substitutionen von $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{(\lambda)}$ in $\alpha|\mathfrak{b}^{(\lambda)}$ über. Die μ Wurzeln der Gleichung $\mathsf{A}(x, \beta) = 0$ sind also

$$(11.) \qquad \alpha, \quad \alpha|\mathfrak{b}_1, \quad \alpha|\mathfrak{b}_2, \ldots \alpha|\mathfrak{b}_{\mu-1},$$

das sind alle Größen, welche aus α durch Anwendung einer der Substitutionen des Komplexes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erhalten werden können; ihre Zahl ist also gleich der Anzahl der Klassen, in welche $\mathfrak{B}$ nach dem Modul $\mathfrak{D}$, oder der Komplex $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach dem Modul $\mathfrak{A}$ zerfällt. Umgekehrt beweist man auch leicht, daß jede symmetrische Funktion der μ Zahlen (11.) bei jeder Substitution der Gruppe $\mathfrak{B}$ ungeändert bleibt und folglich dem Körper $R(\beta)$ angehört, daß somit die Koeffizienten der Gleichung, die die Zahlen (11.) zu Wurzeln hat, in $R(\beta)$ gelegen sind.

Ganz analoge Betrachtungen gelten für die übrigen Faktoren von $A(x)$, welche im Körper $R(\beta)$ irreduktibel sind. Setzen wir für den Augenblick

$$\alpha|\mathfrak{g}_\varkappa = \gamma,$$

so geht γ zufolge der Gleichung (9.) unter dem Einflusse der Substitutionen des Komplexes $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B}$ im ganzen in $\mu_\varkappa$ verschiedene Größen über, nämlich in die Zahlen

$$(12.) \quad \gamma = \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa, \quad \gamma|\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)} = \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)}, \quad \gamma|\mathfrak{b}_\varkappa^{(2)} = \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(2)}, \ldots \gamma|\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)} = \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)},$$

und diese sind die Wurzeln der Gleichung

$$\mathsf{A}_\varkappa(x, \beta) = (x - \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa)\,(x - \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)}) \ldots (x - \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)}),$$

deren Koeffizienten dem Körper $R(\beta)$ angehören, und welche in diesem Bereiche irreduktibel ist. In der Tat, die Größen der Reihe (12.) ändern bei Anwendung einer Substitution von $\mathfrak{B}$ bloß ihre Reihenfolge, weil nach Gleichung (9.) die Zerlegungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{B} &= \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa + \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)} + \cdots + \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)}, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{D}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)} + \cdots + \mathfrak{D}_\varkappa\mathfrak{b}_\varkappa^{(\mu_\varkappa-1)} \end{aligned}$$

gelten, und eine symmetrische Funktion von ihnen gehört somit zum Körper $R(\beta)$. Wenn andererseits eine Gleichung $\Phi(x, \beta) = 0$ dieses Bereiches durch $x = \alpha|\mathfrak{g}_\varkappa = \gamma$ befriedigt wird, so genügen ihr auch die Wurzeln, die aus α

durch Anwendung einer Substitution des Komplexes $\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{B}$, oder aus γ durch Anwendung einer Substitution des Komplexes $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{B}$ hervorgehen, und da dies die Größen der Reihe (12.) sind, so ist $\mathsf{A}_\varkappa(x, \beta)$ irreduktibel.

Hiernach zerfällt die Funktion $A(x)$ nach Adjunktion einer Wurzel β von $B(x) = 0$ in k irreduktibele Faktoren, die den einzelnen Gliedern der Gleichung (4.) in der Weise entsprechen, daß $\mathsf{A}_\varkappa(x, \beta)$ alle die verschiedenen Wurzeln besitzt, welche aus α durch Anwendung einer der Operationen von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{B}$ entstehen. Die Grade dieser Faktoren sind der Reihe nach die Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_{k-1}$ in (8.), deren Summe

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{k-1} = m$$

zufolge der Gleichungen (5.) und (10.) ist. Ganz ebenso aber zerfällt auch $B(x)$ nach Adjunktion von α in k irreduktibele Faktoren $\mathsf{B}(x, \alpha)$, $\mathsf{B}_1(x, \alpha), \dots \mathsf{B}_{k-1}(x, \alpha)$, die den einzelnen Gliedern der Zerlegungsgleichung (6.) in der Weise zugeordnet sind, daß $\mathsf{B}_\varkappa(x, \alpha)$ alle die Wurzeln enthält, welche aus β durch Anwendung einer Operation des Komplexes $\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}$ hervorgehen. Die Grade der Faktoren sind die Zahlen $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots \nu_{k-1}$ und somit den vorigen proportional, da nach (8.) und (10.) $\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \frac{b}{a} = \frac{m}{n}$ ist, und ihre Summe ist

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{k-1} = n.$$

Fassen wir also das Gesamtresultat zusammen, so gilt folgendes Theorem:

Sind $A(x)$ und $B(x)$ zwei ganze ganzzahlige und im Körper der rationalen Zahlen irreduktibele Funktionen, so zerfällt jede von ihnen nach Adjunktion einer Wurzel der anderen in dieselbe Zahl irreduktibeler Faktoren

$$(13.)\qquad \begin{cases} A(x) = \mathsf{A}(x, \beta)\,\mathsf{A}_1(x, \beta) \dots \mathsf{A}_{k-1}(x, \beta), \\ B(x) = \mathsf{B}(x, \alpha)\,\mathsf{B}_1(x, \alpha) \dots \mathsf{B}_{k-1}(x, \alpha) \end{cases}$$

und es lassen sich diese irreduktibelen Faktoren so einander zuordnen, daß ihre Gradzahlen proportional sind und daß jeder von ihnen einem Summanden der in den Relationen (4.) und (6.) gegebenen Zerlegung der Gruppe der Gleichung $A(x)\,B(x) = 0$ entspricht; es enthält nämlich $\mathsf{A}_\varkappa(x, \beta)$ diejenigen Wurzeln von $A(x) = 0$, welche durch Einwirkung der Elemente des Komplexes $\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{B}$ aus α, $\mathsf{B}_\varkappa(x, \alpha)$ diejenigen Wurzeln von $B(x) = 0$, welche durch Einwirkung der Elemente des Komplexes $\mathfrak{B}\,\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}$ aus β hervorgehen.

Der erste Teil dieses Satzes findet sich bereits in einer Abhandlung des Herrn *A. Kneser*, Über die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Größen enthalten sind (Mathemat. Ann. S. 179—202, 1887) und auch in meiner Dissertation (Breslau 1890); aber der Zusammenhang mit der Gruppe der Gleichung $AB=0$, welcher das eigentliche Ziel der vorliegenden Untersuchung ist, bleibt in beiden Arbeiten noch unberührt.

Ersetzt man in den Gleichungen (13.) β, resp. α durch die konjugierten Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}$, resp. $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ und geht durch Produktbildung zur Norm über, so wird jeder einzelne rationale Faktor des auf der rechten Seite stehenden Produktes eine Potenz der irreduktiblen Funktion $A(x)$, resp. $B(x)$, nämlich

$$(14.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_\varkappa(x,\beta)\,\mathsf{A}_\varkappa(x,\beta_1)\dots\mathsf{A}_\varkappa(x,\beta_{n-1}) = A(x)^{\nu_\varkappa}, \\ \mathsf{B}_\varkappa(x,\alpha)\,\mathsf{B}_\varkappa(x,\alpha_1)\dots\mathsf{B}_\varkappa(x,\alpha_{m-1}) = B(x)^{\mu_\varkappa}. \end{cases} \qquad (\varkappa=0,1,2,\dots k-1)$$

4. Diese Entwicklungen setzen keineswegs voraus, daß die beiden Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ verschieden seien. Spezialisiert man die erlangten Resultate für den Fall zweier gleichen Funktionen, so erhält man einige nicht uninteressante Sätze über die Art und Weise, in welcher eine vorgelegte irreduktible Gleichung nach Adjunktion *einer* ihrer Wurzeln zerfällt. In diesem Falle ist $\mathfrak{R}$ einfach die Gruppe der Gleichung $A(x)=0$ im gewöhnlichen Sinne des Wortes, und da der Körper $G=R(\alpha,\alpha_1,\dots\alpha_{m-1})$ zur Gruppe 1 gehört, so kann die Untergruppe $\mathfrak{A}$ mit ihren sämtlichen konjugierten keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Umgekehrt zeigt man leicht, daß eine beliebige gegebene abstrakte Gruppe $\mathfrak{R}$ einer transitiven Permutationsgruppe von m Ziffern holoedrisch isomorph ist, wenn sie eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ vom Index m besitzt, die mit ihren sämtlichen konjugierten keinen Teiler gemein hat. (*Weber*, Algebra, Bd. II, § 28, S. 119.)

Zerlegt man nun die Gruppe $\mathfrak{R}$ nach Maßgabe der Gleichung (4.):

$$(15.)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_1\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_2\mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{A},$$

so kann man unter den auftretenden Summanden zwei Arten unterscheiden. Da nämlich ein Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa\mathfrak{A}$ $\frac{a^2}{d_\varkappa}$ verschiedene Elemente enthält, wobei $d_\varkappa$ der Grad des Durchschnittes der beiden konjugierten Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_\varkappa = \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_\varkappa$ ist, so ergibt sich diese Zahl dann und nur dann gleich a, wenn $d_\varkappa = a$,

also $\mathfrak{A}_\varkappa = \mathfrak{A}$ und somit $\mathfrak{g}_\varkappa$ mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar und

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{A} = \mathfrak{g}_\varkappa\,\mathfrak{A}$$

ist. Diesen Werten von $\varkappa$ entsprechen lineare Faktoren in der Zerlegung

$$(16.)\qquad A(x) = \mathsf{A}(x, \alpha)\,\mathsf{A}_1(x, \alpha) \ldots \mathsf{A}_{k-1}(x, \alpha),$$

während die übrigen Faktoren vom Grade $\frac{a}{d_\varkappa} > 1$ sind; in jedem Falle sind die auftretenden Gradzahlen sämtlich Teiler der Zahl a.

Die Anzahl ϱ der in der Gleichung (16.) auftretenden Linearfaktoren läßt sich noch etwas genauer bestimmen, wenn man berücksichtigt, daß die ihnen entsprechenden Glieder der Summe (15.)

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_{\varrho-1}\,\mathfrak{A}$$

alle und nur die Elemente der Gruppe $\mathfrak{R}$ umfassen, welche mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind. Die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente bilden aber bekanntlich eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{R}$, deren Grad h somit gleich ϱa ist, wo ϱ einen Teiler von $m = \frac{r}{a}$ bedeutet. Da die Gruppe $\mathfrak{A}$ durch jedes der Elemente von $\mathfrak{H}$ und nur durch diese in sich transformiert wird, so besitzt sie im ganzen $\frac{r}{h} = \frac{m}{\varrho}$ verschiedene konjugierte Gruppen. Die Zahl ϱ der in (16.) auftretenden Linearfaktoren ist also gleich dem Index, den die Gruppe $\mathfrak{A}$ in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ der mit ihr vertauschbaren Elemente besitzt.

Soll also $\varrho = 1$ sein, so muß $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$ sein; es darf also $\mathfrak{A}$ mit keinem Elemente außerhalb $\mathfrak{A}$ vertauschbar sein und die m zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Gruppen sind sämtlich von einander verschieden. Soll ferner in diesem Falle in der Gleichung (16.) außer dem Linearfaktor nur noch ein weiterer Faktor der Ordnung $m-1$ auftreten, so ist die Gruppe der Gleichung mehrfach transitiv. Alsdann ist $k = 2$ und die Gleichung (15.) wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{A}.$$

In diesem Falle besteht also der Komplex $\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{A}$ aus $r-a$ Elementen und es ist somit

$$r - a = \frac{a^2}{d_1}, \quad \text{also}$$

$$d_1 = \frac{a^2}{r-a} = \frac{a}{m-1};$$

der größte gemeinsame Teiler der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_1$ hat somit den Grad d_1 und den Index $m-1$. Es ergibt sich also der Satz:

Einer Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{N}$ vom Index m entspricht isomorph eine Vertauschungsgruppe von m Ziffern. Soll dieselbe mehrfach transitiv sein, so ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{A}$ von ihren m konjugierten Gruppen verschieden ist und daß irgend ein Paar konjugierter Gruppen, das man beliebig wählen kann, einen größten gemeinschaftlichen Teiler vom Index $m-1$ hat.

Es folgt aus der Beweisführung und ist wesentlich an diesem Satze, daß ein einziges Paar konjugierter Gruppen, z. B. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}_1$, zur Feststellung der mehrfachen Transitivität hinreicht.

5. Die vorstehenden Entwicklungen bedürfen nun aber nur gewisser, nicht sehr erheblicher Modifikationen, um von Gleichungen auf algebraische *Kongruenzen* übertragen werden zu können; nur erweist es sich hierbei als notwendig, nicht mehr von einer beliebigen Gleichung des gerade betrachteten Körpers, sondern von der zugehörigen Fundamentalgleichung auszugehen. Da aber die Zerfällung in irreduktible Faktoren, welche die Fundamentalgleichung eines Körpers rücksichtlich einer Primzahl p gestattet, auch die Zerlegung von p in seine Primideale ergibt, so gelangt man auf diesem Wege zur Feststellung des Zusammenhanges, welcher zwischen den Primfaktoren von p in einem *Galois*schen Körper und in einem beliebigen seiner Unterkörper stattfindet. Bei der Auseinandersetzung dieser Verhältnisse will ich mich der von Herrn *Hilbert* in seinem Berichte über die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Jahresb. d. deutschen Mathem.-Ver. 1897) eingeführten Terminologie bedienen und auf diesen auch hinsichtlich einiger Hilfssätze verweisen (zitiert durch *H.*).

In dem *Galois*schen Körper G mögen die r Zahlen

$$\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots \gamma^{(r-1)}$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen des Bereichs bilden; die zugehörige Fundamentalform

$$\Gamma = u_0\gamma^{(0)} + u_1\gamma^{(1)} + u_2\gamma^{(2)} + \cdots + u_{r-1}\gamma^{(r-1)} \tag{17.}$$

genügt alsdann einer irreduktiblen Gleichung r-ten Grades:

$$\Phi(X) = X^r + U_1 X^{r-1} + \cdots + U_r = 0, \tag{18.}$$

deren Koeffizienten ganze rationale Formen der Unbestimmten u mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Ist nun P ein Primdivisor vom Grade f und p die rationale Primzahl, in der P aufgeht, so ist die Norm

$$N(P) = p^f.$$

Es sei $\mathfrak{Z}$ die sogenannte Zerlegungsgruppe von P, d. i. die Gruppe der Abbildungen des Körpers G, die den Divisor P intakt lassen, so gehört zu $\mathfrak{Z}$ ein bestimmter Unterkörper Z von G, der Zerlegungskörper des Divisors P (*H.* § 39). Ist h der Grad der Zerlegungsgruppe, so ist $e = \frac{r}{h}$ der Grad des Zerlegungskörpers, und ebenso groß ist die Zahl der zu P konjugierten und von einander verschiedenen Primdivisoren

$$P, P_1, P_2, \dots P_{e-1}.$$

Bildet man also die Norm von P, d. i. das Produkt aller r Primdivisoren, die durch die Abbildungen von $\mathfrak{R}$ aus P hervorgehen, so werden immer je h Faktoren dieses Produktes einander gleich und man findet somit

$$(19.) \qquad N(P) = p^f = (P P_1 P_2 \dots P_{e-1})^h;$$

es ist also h ein Vielfaches von f, und wenn man $h = fg$ setzt, so ergibt sich

$$(20.) \qquad p = (P P_1 P_2 \dots P_{e-1})^g.$$

Jede ganze Zahl α des Zerlegungskörpers ist nun mod. P einer *rationalen* Zahl kongruent. Um dies zu erweisen, berücksichtigen wir, daß sich durch Erhebung der Gleichung

$$\Phi(I') = 0$$

in die p-te Potenz auch die Linearform:

$$I'_1 = u_0(\gamma^{(0)})^p + u_1(\gamma^{(1)})^p + \dots + u_{r-1}(\gamma^{(r-1)})^p$$

als Wurzel der Kongruenz

$$\Phi(X) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P)$$

erweist. Da aber die sämtlichen Wurzeln von $\Phi = 0$ die Konjugierten der Fundamentalform I' sind, so gibt es jedenfalls eine Abbildung $\mathfrak{z}$ des Körpers G (ev. auch mehrere), für welche

$$I'|\mathfrak{z} \equiv I'_1 \qquad (\text{mod. } P)$$

ist. Hiernach gilt für *jede* ganze Zahl α des Körpers G die Kongruenz

$$\alpha|\mathfrak{z} \equiv \alpha^p \pmod{P},$$

und es gehört $\mathfrak{z}$ zur Zerlegungsgruppe, weil nach dieser Kongruenz gleichzeitig mit α auch die konjugierte Zahl $\alpha|\mathfrak{z}$ durch P teilbar und somit der Primdivisor $P|\mathfrak{z} = P$ ist. Gehört nun α dem Zerlegungskörper an, so ist

$$\alpha|\mathfrak{z} = \alpha,$$

folglich

$$\alpha^p \equiv \alpha \pmod{P},$$

und da die Wurzeln dieser letzten Kongruenz die Zahlen $0, 1, 2, \dots p-1$ sind, so gibt es in dieser Reihe ein und nur ein Element a, für welches

$$\alpha \equiv a \pmod{P}$$

ist.

Es ist nun aber für die Folge wichtig, daß diese letzte Kongruenz stets nicht bloß für den Modul P, sondern für die Potenz P^g gilt; denn es besteht der Satz: *Wenn eine ganze Zahl α des Zerlegungskörpers durch P teilbar ist, so ist sie auch durch P^g teilbar; es ist also P^g ein Primdivisor des Zerlegungskörpers.*

In der Tat, da die Norm des Divisors P in bezug auf den Zerlegungskörper gleich P^h ist, so ist zunächst diese Potenz von P ein Divisor von Z und das gleiche gilt daher auch von dem komplementären Divisor

$$E = (P_1\, P_2 \dots P_{e-1})^h,$$

der zu P relativ prim ist. Andererseits ist zufolge der Gleichung (19.)

$$p^f = P^h \cdot E,$$

und da die beiden Faktoren des Produktes rechts teilerfremd sind, so muß notwendig jeder von ihnen f-te Potenz eines im Zerlegungskörper gelegenen Divisors sein; also ist

$$\text{(21.)} \qquad P^h = \Pi^f, \qquad \Pi = P^g$$

und Π ein Divisor von Z, der sich in diesem Körper als Primideal ersten Grades erweist. In der Tat bezeichnet man die Norm von Π in G und in Z mit $N(\Pi)$ und $n(\Pi)$, so ist

$$N(\Pi) = (n(\Pi))^h,$$

andererseits ist

$$N(\Pi) = N(P^g) = p^{fg} = p^h,$$

also

$$n(\Pi) = p, \quad \text{q. e. d.}$$

Ist also $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(e-1)}$ ein Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen des Zerlegungskörpers, so bestehen e Kongruenzen der Form

$$(22.) \qquad \zeta^{(0)} \equiv \varrho^{(0)}, \quad \zeta^{(1)} \equiv \varrho^{(1)}, \ldots \zeta^{(e-1)} \equiv \varrho^{(e-1)} \quad (\text{mod. } P^g),$$

wobei $\varrho^{(0)}, \varrho^{(1)}, \ldots \varrho^{(e-1)}$ *rationale* Zahlen sind.

Besteht endlich zwischen ganzen Zahlen $\gamma, \gamma', \ldots$ des Körpers G irgend eine Kongruenz mit rationalen Zahlkoeffizienten

$$\psi(\gamma, \gamma', \ldots) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P),$$

so kann auf diese jede der Substitutionen der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ angewendet werden, ohne daß die Kongruenz ihre Gültigkeit verliert; dies ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaft des Divisors P, unter dem Einflusse von $\mathfrak{Z}$ ungeändert zu bleiben. In diesem Sinne kann die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ auch als die *Gruppe des Galoisschen Körpers nach dem Primdivisor* P bezeichnet werden.

6. Nach diesen Vorbemerkungen erörtern wir nunmehr die Zerlegung, welche die Fundamentalgleichung eines beliebigen Unterkörpers A von G rücksichtlich einer Primzahl erfährt. Es gehöre unter Beibehaltung früherer Bezeichnungen der Körper $A = R(\alpha)$ zur Gruppe $\mathfrak{A}$ des Grades a, und es mögen die $m = \frac{r}{a}$ ganzen Zahlen $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \ldots \alpha^{(m-1)}$ in ihm ein Fundamentalsystem bilden. Die Fundamentalform

$$w = v_0\,\alpha^{(0)} + v_1\,\alpha^{(1)} + \cdots + v_{m-1}\,\alpha^{(m-1)}$$

genügt alsdann einer in R irreduktiblen Gleichung m-ten Grades:

$$(23.) \qquad \Psi(x) = x^m + V_1 x^{m-1} + \cdots + V_m = 0.$$

Ist nun P ein Primdivisor von G und Z der zugehörige Zerlegungskörper, so werde zunächst die Reduktion bestimmt, welche die Funktion $\Psi(x)$ durch Adjunktion von Z erfährt. Zu diesem Zwecke hat man nach Nr. 3 die Gruppe $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ zu zerlegen:

$$(24.) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_1\mathfrak{Z} + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_2\mathfrak{Z} + \cdots + \mathfrak{A}\mathfrak{g}_{k-1}\mathfrak{Z},$$

dann entsprechen den einzelnen Gliedern dieser Summe die nach Adjunktion von f irreduktiblen Faktoren von

$$(25.)\qquad \Psi(x) = \psi(x, \zeta^{(\lambda)})\, \psi_1(x, \zeta^{(\lambda)}) \dots \psi_{k-1}(x, \zeta^{(\lambda)}),$$

deren Koeffizienten ganze Größen des Zerlegungskörpers und somit lineare ganzzahlige Funktionen von $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(e-1)}$ sind.

Die Gradzahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_{k-1}$ bestimmen sich nach Maßgabe der Auseinandersetzungen in Nr. 2, wobei man nur die Zeichen $\mathfrak{B}, b, n$ durch $\mathfrak{Z}, h$ und e zu ersetzen hat, während alle übrigen Bezeichnungen beibehalten werden. Es soll nun gezeigt werden, daß aus den Gleichungen (24.) und (25.) vollständig die Zerlegung der Fundamentalgleichung $\Psi(x) = 0$ mod. p und damit auch die Zerlegung der Primzahl in p in Primideale des Körpers A hergeleitet werden kann.

Betrachten wir zunächst den ersten Faktor in (25.), welcher $x = w$ und alle aus der Fundamentalform durch Anwendung der Substitutionen von $\mathfrak{A}\mathfrak{Z}$ hervorgehenden Größen zu Wurzeln hat, so folgt aus der Gleichung

$$\psi(w, \zeta^{(\lambda)}) = 0$$

und den Kongruenzen (22.), daß

$$(26.)\qquad \psi(w, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P^g)$$

ist; es genügt also die Fundamentalform mod. P^g einer Kongruenz μ-ten Grades mit ganzzahligen *reellen* Koeffizienten. Vermöge dieser Eigenschaft ändert sich die linke Seite von (26.) überhaupt gar nicht, wenn man die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$, die ja w intakt lassen, zur Anwendung bringt, und es besteht somit die Kongruenz (26.) auch für alle Divisoren, welche aus P^g durch die Abbildungen der Gruppe $\mathfrak{A}$ hervorgehen. Ist nun zufolge der Gleichung (9.)

$$(9^a.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}\mathfrak{Z} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{z}^{(1)} + \cdots + \mathfrak{A}\mathfrak{z}^{(\mu-1)} \\ \quad = \mathfrak{Z} + \mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{Z} + \cdots + \mathfrak{a}^{(\nu-1)}\mathfrak{Z}, \end{cases}$$

so gehen aus (26.) die weiteren Kongruenzen hervor:

$$(26^a.)\qquad \begin{cases} \psi(w, \varrho^{(\lambda)} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } [P|\mathfrak{a}^{(1)}]^g), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \psi(w, \varrho^{(\lambda)} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } [P\,\mathfrak{a}^{(\nu-1)}]^g), \end{cases}$$

wobei die sämtlichen in (26.) und (26ª.) auftretenden Moduln paarweise relativ prim sind. Somit gilt auch die allgemeinere Kongruenz

$$(27.)\qquad \psi(w, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } [P \cdot P\,\mathfrak{a}^{(1)} \dots P\,\mathfrak{a}^{(\nu-1)}]^{\varrho}).$$

Daß der hier auftretende Modul dem Körper A angehört, ist sofort ersichtlich; denn die Gleichung (9ª.), die man auch in die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{D} + \dots + \mathfrak{a}^{(\nu-1)}\mathfrak{D}$$

setzen kann, lehrt unmittelbar, daß jener Modul die Norm einer Potenz von P ist. Es geht aber aus unseren Überlegungen auch leicht hervor, daß der Modul eine Potenz eines Primdivisors ist und daß wir daher

$$(28.)\qquad M = [P \cdot P\,\mathfrak{a}^{(1)} \dots P\,\mathfrak{a}^{(\nu-1)}]^{\varrho} = \Pi^{\varepsilon}$$

setzen können, wo Π ein Primideal des Körpers A und ε einen noch näher zu bestimmenden Exponenten bedeutet. In der Tat wäre jener Divisor M das Produkt mehrerer Primidealpotenzen

$$M = \Pi_1^{\varepsilon}\,\Pi_2^{\varepsilon} \dots,$$

so könnte man eine Zahl α des Körpers A bestimmen, welche durch Π_1^{ε} teilbar, aber zu Π_2^{ε} relativ prim wäre. Eine solche Zahl α wäre somit durch einige der Potenzen auf der linken Seite von (28.) z. B. durch P^{ϱ} teilbar, während sie mindestens zu einer der anderen Potenzen z. B. zu $[P\,\mathfrak{a}^{(1)}]^{\varrho}$ relativ prim wäre. Aber aus der Kongruenz

$$\alpha \equiv 0 \qquad (P^{\varrho})$$

folgt stets, daß sie bestehen bleibt, wenn man P durch einen der konjugierten Faktoren $P\,\mathfrak{a}_1 \dots$ ersetzt, woraus sich ein Widerspruch ergibt.

In ganz analoger Weise lassen sich die übrigen Faktoren der Gleichung (25.) behandeln. Setzen wir für den Augenblick

$$w\,\mathfrak{g}_{\varkappa} = w_{\varkappa},$$

so folgt aus der Gleichung des Grades $\mu_{\varkappa}$

$$\psi_{\varkappa}(w_{\varkappa}, \zeta^{(\lambda)}) = 0$$

die Kongruenz

$$\psi_{\varkappa}(w_{\varkappa}, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P^{\varrho}),$$

aus welcher sich durch Anwendung der Substitution $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}$ ergibt:

$$\psi_\varkappa(w, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P^g|\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}).$$

Diese Kongruenz kann man, ohne daß die linke Seite sich ändert, irgend einer Substitution der Gruppe $\mathfrak{A}$ unterwerfen; berücksichtigt man daher, daß, wenn $\mathfrak{D}_\varkappa$ der Durchschnitt von $\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa$ und $\mathfrak{Z}$ ist, nach (9ᵃ.) die Zerlegung

$$\mathfrak{g}_\varkappa^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_\varkappa = \mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{a}_\varkappa^{(1)}\mathfrak{D}_\varkappa + \mathfrak{a}_\varkappa^{(2)}\mathfrak{D}_\varkappa + \cdots + \mathfrak{a}_\varkappa^{(\nu_\varkappa-1)}\mathfrak{D}_\varkappa$$

besteht, so folgt durch eine Überlegung, welche vollkommen parallel der vorigen verläuft, die Gültigkeit der Kongruenz:

(29.) $$\psi_\varkappa(w, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } M_\varkappa),$$

worin

(30.) $$M_\varkappa = [P|\mathfrak{g}_\varkappa^{-1} \cdot P|\mathfrak{a}_\varkappa^{(1)}\mathfrak{g}_\varkappa^{-1} \dots P|\mathfrak{a}_\varkappa^{(\nu_\varkappa-1)}\mathfrak{g}^{-1}]^g$$

gesetzt ist. Dieser Modul erweist sich durch dieselben Schlüsse wie vorher als Potenz eines Primdivisors des Körpers A; wir setzen daher

(31.) $$M_\varkappa = \Pi_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa},$$

worin der Exponent $\varepsilon_\varkappa$ noch näher zu bestimmen bleibt. Stellt man die Gleichung (30.) für $\varkappa = 0, 1, 2, \dots k-1$ auf, so zeigt die Relation (24.), daß jede der e konjugierten Potenzen

$$P^g, P_1^g, P_2^g, \dots P_{-1}^g$$

einmal und nur einmal auftritt. Zufolge der Gleichung (20.) haben wir also für die Primzahl p im Körper A die Primidealzerlegung

(32.) $$p = M\, M_1\, M_2 \dots M_{k-1} = \Pi^\varepsilon\, \Pi_1^{\varepsilon_1}\, \Pi_2^{\varepsilon_2} \dots \Pi_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}.$$

Durch Multiplikation der Kongruenzen (29.) ergibt sich somit, daß w mod. p der Kongruenz

$$\psi(w, \varrho^{(\lambda)})\, \psi_1(w, \varrho^{(\lambda)}) \dots \psi_{k-1}(w, \varrho^{(\lambda)}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

genügt, und da die linke Seite vom Grade

$$\mu + \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} = m$$

ist und w modulo p keiner Kongruenz niedrigeren als m-ten Grades genügt (*II.* § 11), so folgt nunmehr, daß der identischen Gleichung (25.) die völlig

analoge Kongruenz

$$(33.)\quad \Psi(x) \equiv \psi(x, \varrho^{(\lambda)})\, \psi_1(x, \varrho^{(\lambda)}) \ldots \psi_{k-1}(x, \varrho^{(\lambda)}) \pmod{p}$$

zur Seite steht; die einzelnen Faktoren der rechten Seite sind somit Potenzen von Primfunktionen, die den Gleichungen (31.) entsprechen; es ist nämlich

$$(34.)\quad \Psi_\varkappa(x, \varrho^{(\lambda)}) = \varpi_\varkappa(x)^{e_\varkappa},$$

wobei $\varpi_\varkappa$ mod. p irreduktibel ist. *Aus der Zerfällung der Fundamentalgleichung eines Körpers A im Zerlegungskörper Z kann also ihre Zerfällung in Primfunktionen mod. p und damit die Zerfällung von p in Primideale unmittelbar abgeleitet werden.*

7. Es bleibt nur noch übrig, die in den Gleichungen (31.) und (34.) auftretenden Exponenten $e_\varkappa$ des näheren zu bestimmen und mit der Gruppenzerlegung von $\mathfrak{R}$ in Zusammenhang zu bringen. Hierzu ist es erforderlich, noch näher auf die Konstitution der Zerlegungsgruppe und die Bedeutung der in ihr auftretenden charakteristischen Zahl g einzugehen. Die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ enthält nämlich eine bestimmte invariante Untergruppe $\mathfrak{T}$ vom Grade g, die sogenannte Trägheitsgruppe des Ideals P, die von der Gesamtheit der Abbildungen $\mathfrak{t}$ des Körpers gebildet wird, für welche nicht bloß P in sich übergeht, sondern auch die Fundamentalform Γ sich selbst kongruent bleibt, so daß

$$\Gamma|\mathfrak{t} \equiv \Gamma \pmod{P}$$

ist (*H.* § 39); die zur Gruppe $\mathfrak{T}$ gehörige komplementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$ (in der Bezeichnungsweise von Herrn *Hölder*) ist zyklisch und wird von den ersten f Potenzen der in Nr. 5 benutzten Abbildung $\mathfrak{z}$ gebildet, so daß

$$(35.)\quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}\mathfrak{z} + \mathfrak{T}\mathfrak{z}^2 + \cdots + \mathfrak{T}\mathfrak{z}^{f-1}$$

und $\mathfrak{T}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{T}$ ist. Ist nun wieder $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{T}$, so ist nach einem Satze der Gruppentheorie, weil $\mathfrak{T}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ ist, auch $\mathfrak{S}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{D}$ und die komplementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ ist eine Untergruppe von $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$ (man sehe hierüber *Weber*, elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, § 53, 4). Da also $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$ von den f ersten Potenzen von $\mathfrak{z}$ gebildet wird, so ist auch $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ eine zyklische Gruppe und wird von den Potenzen einer Sub-

stitution $\mathfrak{z}^i$ gebildet, wo i einen Teiler von f bedeutet; es ist also, wenn $f=ij$ ist,

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{S}+\mathfrak{S}\mathfrak{z}^i+\mathfrak{S}\mathfrak{z}^{2i}+\cdots+\mathfrak{S}\mathfrak{z}^{(j-1)i}. \tag{36.}$$

Da eine beliebige Potenz von $\mathfrak{z}$, deren Exponent $<f$ ist, zwar in $\mathfrak{Z}$, aber nicht in $\mathfrak{T}$ gelegen ist, so liegt sie auch nicht in $\mathfrak{S}$; es enthält also $\mathfrak{S}$ keine Potenz von $\mathfrak{z}$, und es ist $\mathfrak{z}^i$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{z}$, welche in $\mathfrak{D}$, aber nicht in $\mathfrak{S}$ hineinfällt. Ist ferner s der Grad von $\mathfrak{S}$ und ε der Index von $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{T}$, so ist

$$d=js, \qquad g=\varepsilon s \qquad \text{und} \qquad \mu j=\varepsilon f, \tag{37.}$$

weil sowohl μj als auch εf der Index von $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{Z}$ ist.

Kehren wir jetzt zu der Gleichung μ-ten Grades

$$\psi(w, \zeta^{(\lambda)})=0$$

zurück, so sind ihre Wurzeln diejenigen, welche aus w unter dem Einflusse der Substitutionen von $\mathfrak{Z}$ hervorgehen, und sie entsprechen den μ Komplexen der Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ nach $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{Z}=\mathfrak{D}+\mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(1)}+\mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(2)}+\cdots+\mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(\mu-1)}. \tag{38.}$$

Da aber $\mathfrak{z}^i$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{z}$ ist, welche in $\mathfrak{D}$ hineinfällt, so liegen $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^2, \dots \mathfrak{z}^{i-1}$ außerhalb $\mathfrak{D}$ und finden sich somit in den Komplexen $\mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(1)}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(2)}, \dots \mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(\mu-1)}$ vor und es kommen nie zwei verschiedene dieser Potenzen in demselben Komplex vor.

Da nun die Primfunktion $\varpi(x)$, von welcher $\psi(x, \varrho^{(\lambda)})$ Potenz ist, die mod. P *von einander verschiedenen* Größen der Reihe

$$w,\ w|\mathfrak{z},\ w|\mathfrak{z}^2, \dots w|\mathfrak{z}^{f-1}$$

zu Kongruenzwurzeln mod. P hat, so ist sie vom Grade i und der auftretende Exponent ist gleich $\frac{\mu}{i}=\frac{\mu j}{f}=\varepsilon$. Es ergibt sich somit nach (30.) und (31.)

$$M=\Pi^{\varepsilon} \qquad \text{und}$$
$$\Pi=[P\cdot P|\mathfrak{a}^{(1)}\dots P|\mathfrak{a}^{(\nu-1)}]^s;$$

denn es ist in der Tat nach (37.)

$$\frac{g}{\varepsilon}=s.$$

In ganz der gleichen Weise gibt die Untersuchung der übrigen Faktoren der Fundamentalgleichung Veranlassung zur Bildung des Durchschnittes $\mathfrak{S}_\varkappa$ von $\mathfrak{D}_\varkappa$ und $\mathfrak{T}$ und zur Aufstellung der Gleichung

$$(36^a.)\qquad \mathfrak{D}_\varkappa = \mathfrak{S}_\varkappa + \mathfrak{S}_\varkappa \mathfrak{z}^{i_\varkappa} + \cdots + \mathfrak{S}_\varkappa \mathfrak{z}^{(j_\varkappa - 1) i_\varkappa},$$

worin $\mathfrak{z}^{i_\varkappa}$ die niedrigste in $\mathfrak{D}_\varkappa$ vorkommende Potenz von $\mathfrak{z}$ und

$$f = i_\varkappa j_\varkappa$$

gesetzt ist. Alsdann ist, wenn der Grad von $\mathfrak{S}_\varkappa$ gleich $s_\varkappa$ ist,

$$(37^a.)\qquad d_\varkappa = j_\varkappa s_\varkappa, \quad g = \varepsilon_\varkappa s_\varkappa \quad \text{und} \quad \mu_\varkappa j_\varkappa = \varepsilon_\varkappa f,$$

und es ist $\varepsilon_\varkappa$ der Exponent in der Gleichung

$$(31.)\qquad M = \Pi_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa},$$

während das Primideal $\Pi_\varkappa$ des Körpers A in (30.) sich nunmehr durch die Gleichung

$$(39.)\qquad \Pi_\varkappa = [P \,|\, \mathfrak{g}_\varkappa^{-1} \cdot P \,|\, \mathfrak{a}_\varkappa^{(1)} \mathfrak{g}_\varkappa^{-1} \ldots P \,|\, \mathfrak{a}_\varkappa^{(\nu_\varkappa - 1)} \mathfrak{g}_\varkappa^{-1}]^{s_\varkappa}$$

bestimmt.

Zufolge dieser Gleichung ist die Norm des Ideals $\Pi_\varkappa$ im *Galois*schen Körper gleich $p^{f \nu_\varkappa s_\varkappa}$, im Körper A ist also die Norm desselben Ideals gleich $p^{\frac{f \nu_\varkappa s_\varkappa}{a}}$, und der hier auftretende Exponent (siehe die Gleichungen (8.) und (37^a.))

$$\frac{f \nu_\varkappa s_\varkappa}{a} = \frac{f s_\varkappa}{d_\varkappa} = \frac{f}{j_\varkappa} = i_\varkappa$$

ist, wie es sein muß, gleich dem Grade der zum Ideale $\Pi_\varkappa$ gehörigen Primfunktion $\varpi_\varkappa(x)$. Geht man also in der Gleichung

$$p = \Pi^{\varepsilon} \Pi_1^{\varepsilon_1} \Pi_2^{\varepsilon_2} \ldots \Pi_k^{\varepsilon_{k-1}}$$

zur Norm über, so ergibt sich die Relation

$$m = \varepsilon i + \varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} i_{k-1},$$

die bloß wieder eine Umformung der aus der Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{R}$ folgenden Gleichung (5.)

$$r = \frac{ah}{d} + \frac{ah}{d_1} + \cdots + \frac{ah}{d_{k-1}}$$

ist, weil $\frac{h}{d_\varkappa} = \mu_\varkappa = \varepsilon_\varkappa i_\varkappa$ ist.

Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

§ I.

1. Es sei die Gleichung

$$\text{(I.)}\qquad z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_k z^{n-k} + \cdots + c_n = 0$$

gegeben, deren Koeffizienten rationale ganze Größen irgend eines holoiden Bereiches $[(A), x_1, x_2, \ldots x_m]$ bezw. $[[1], x_1, x_2, \ldots x_m]$ sind.*) Es sei ferner P eine rationale Primgröße des Bereiches; w eine Wurzel der Gleichung (I.), die den Gattungsbereich (Γ) bestimmt. Es sollen in bezug auf den Gattungsbereich die Zerlegungen

$$\text{(2.)}\qquad \begin{cases} P = \mathfrak{P}_1^{e_1}\, \mathfrak{P}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{e_r}, \\ w = \mathfrak{P}_1^{a_1}\, \mathfrak{P}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{a_r}\, \mathfrak{Q}, \quad (P, \mathfrak{Q}) = 1 \end{cases}$$

bestehen, wo $\mathfrak{P}_i$ ein Primideal, die Zahl e_i eine positive und die Zahl a_i eine nicht negative rationale ganze Zahl bedeuten.

Im folgenden sollen die Verhältnisse

$$\text{(3.)}\qquad \frac{a_i}{e_i} = Ch_i$$

kurz als die *charakteristischen Zahlen* der Größe w in bezug auf P bezeichnet werden.

2. Eine erste Aufgabe bildet die Bestimmung der *möglichen* charakteristischen Zahlen, wenn die Gleichung gegeben ist. Diese Aufgabe ist

*) Man vergleiche für die Terminologie: *König*, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, oder die Note: Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen, dieses Journal Bd. 128, S. 298.

sehr leicht lösbar durch die Konstruktion des aus der Theorie der algebraischen Funktionen bekannten *Puiseux*schen Polygons. Für unsere Zwecke ist es notwendig, diese Konstruktion hier ausführlich zu behandeln.*) Jede von Null verschiedene ganze Größe des holoiden Bereiches ist durch eine größte, nicht negative rationale ganze Potenz von P teilbar in der Weise, daß der zugehörige Quotient schon relativ prim gegen P ist. Wir werden den so bestimmten Exponenten die Ordnung in bezug auf P nennen; es seien z. B. die Ordnungen der Koeffizienten c_k in bezug auf P die Zahlen r_k. Ganz analog besitzt eine jede ganze Größe des Bereiches (I') eine Ordnung in bezug auf das Primideal $\mathfrak{P}$. So sind z. B. die Ordnungen der Größen

$$(4.)\qquad w^n,\ c_1 w^{n-1},\ c_2 w^{n-2}, \dots c_n$$

in bezug auf $\mathfrak{P}_i$ nach der Reihe durch die Zahlen

$$(5.)\qquad \begin{cases} n a_i = e_i n\, Ch_i,\ r_1 e_i + (n-1)\, a_i = e_i (r_1 + (n-1)\, Ch_i), \\ \qquad\qquad r_2 e_i + (n-2)\, a_i = e_i (r_2 + (n-2)\, Ch_i), \dots r_n e_i \end{cases}$$

gegeben. Es kann unter den Zahlen (5.) keine *einzige kleinste* existieren, denn in diesem Falle würde nach der Idealtheorie die Summe

$$w^n + \sum_{k=1}^{n} c_k w^{n-k}$$

jene kleinste Zahl als Ordnung in bezug auf P besitzen und so wäre w keine Wurzel der Gleichung (I.) Infolgedessen können die Zahlen Ch_i nur solchen Werten T gleich gewählt werden, für welche die Reihe

$$(5^*.)\qquad nT,\ r_1 + (n-1)\, T,\ r_2 + (n-2)\, T, \dots r_n$$

mindestens *zwei kleinste* Zahlen aufweist. (Der gemeinsame Faktor e_i der Reihe (5.) wurde als unwesentlich beseitigt.) Nun erfolgt die Bestimmung der Werte T bekanntlich durch die Konstruktion desjenigen *Puiseux*schen Polygons, welches in der Koordinatenebene (x, y) zu den Punkten

$$(0, 0),\ (1, r_1),\ (2, r_2), \dots (n, r_n)$$

gehört. Die fraglichen Werte T sind nämlich gleich den Richtungstangenten der einzelnen Seiten. In der Weise besitzt jede Gleichung (I.) in bezug auf P

*) Es ist keine wesentliche Beschränkung, daß wir hier nur ganze Größen in betracht ziehen.

ein *Puiseux*sches Polygon und zugehörige *Puiseux*sche Zahlen. Es besteht folglich die Tatsache:

*Die möglichen charakteristischen Zahlen der Wurzeln werden durch die Puiseuxschen Zahlen geliefert.**)

4. Nun kann man sich fragen, ob auch umgekehrt die *Puiseux*schen Zahlen alle auftreten, wenn man sämtliche Wurzeln in betracht zieht? In dieser Arbeit wird gezeigt, daß die möglichen charakteristischen Zahlen *in der Tat* existieren**) (§ III). Der § II enthält einleitende Ausführungen, während im § IV die Kenntnis der charakteristischen Zahlen auf Irreduzibilitäts-Untersuchungen angewendet wird. —

§ II.

1. Es sollen die Eckpunkte des *Puiseux*schen Polygons der Gleichung

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_k z^{n-k} + \cdots + c_n = 0 \tag{I.}$$

in bezug auf P durch jene Punkte geliefert werden, welche zu den Potenzen

$$z^n,\ z^{n-k_1},\ z^{n-k_1-k_2}, \ldots z^{n-(k_1+k_2+\cdots+k_s)} = 1 \tag{2.}$$

gehören. Wir werden fürs erste beweisen, daß in diesem Falle

$$r_{k_1+k_2+\cdots+k_i} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{3.}$$

ist, wo die Zahl α_1 eine nicht negative rationale ganze Zahl ist, während die übrigen α positive rationale ganze Zahlen bedeuten. Die *Puiseux*schen Zahlen der Gleichung sind nach der Reihe den Zahlen:

$$T_1 = \frac{\alpha_1}{k_1},\ T_2 = \frac{\alpha_2}{k_2}, \ldots T_s = \frac{\alpha_s}{k_s} \tag{4.}$$

gleich, welche noch den Ungleichungen

$$T_1 < T_2 < \cdots < T_s \tag{4*.}$$

genügen.

---

*) Im Falle ein Koeffizient gleich Null und infolgedessen die entsprechende Ordnung nicht endlich ist, bleibt der zugehörige Punkt bei der Konstruktion einfach unberücksichtigt. Wir können und wollen voraussetzen, daß $c_n \neq 0$ ist.

**) Diese Untersuchung fällt ganz aus, wenn die Anzahl der möglichen charakteristischen Zahlen gleich Eins ist. Vergl. die Note: Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. Dieses Journal Bd. 128, S. 298. Es ist ferner evident, daß sämtliche Wurzeln einer irreduziblen Gleichung dieselben charakteristischen Zahlen besitzen.

2. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\alpha_0 = k_0 = 1$$

einführen, dann werden nach den Voraussetzungen die *Puiseux*schen Zahlen durch die Relationen

$$(5.)\quad \begin{cases} (\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1})+(n-k_0-k_1-\cdots-k_{i-1})\,T_i \\ =(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_i)\quad+(n-k_0-k_1-\cdots-k_i)\,T_i \end{cases}$$

zu bestimmen sein, daher ist in der Tat

$$T_i = \frac{\alpha_i}{k_i}.$$

Die Behauptung (4*.), welche ihrerseits die Positivität der Zahlen α nach sich zieht, folgt auch aus der Definition des Polygons. Es ist nämlich

$$(6.)\quad \begin{cases} (\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_i)\quad+(n-k_0-k_1-\cdots-k_i)\,T_{i-1} \\ >(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1})+(n-k_0-k_1-\cdots-k_{i-1})\,T_{i-1}. \end{cases}$$

Infolgedessen ist

$$\alpha_i - k_i T_{i-1} > 0,\quad \frac{\alpha_i}{k_i} = T_i > T_{i-1}.$$

Wir können auch leicht Ungleichungen für die Ordnungszahlen der bisher nicht betrachteten Koeffizienten ableiten. Es ist tatsächlich nach der Definition des Polygons

$$\begin{aligned} & r_{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+l}+(n-k_0-k_1-\cdots-k_{i-1}-l)\,T_i \\ & \geqq \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i+(n-k_0-k_1-\cdots-k_{i-1}-k_i)\,T_i. \end{aligned}$$

Nun ist

$$T_i = \frac{\alpha_i}{k_i},$$

woraus

$$r_{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+l}-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i) \geqq \frac{l\alpha_i}{k_i}-\alpha_i$$

folgt, also bestehen die Ungleichungen

$$(7.)\qquad r_{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+l} \geqq \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{i-1}+l\,\frac{\alpha_i}{k_i}.$$

3. Es ist noch leicht ersichtlich aus der Betrachtung des Polygons, daß die soeben abgeleiteten Gleichungen und Ungleichungen nicht nur

notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen bilden für die besprochene Gestalt des Polygons. Infolgedessen können diese Resultate, welche nur explizite Formulierungen evidenter Tatsachen sind, folgendermaßen ausgesprochen werden.

Die Eckpunkte des Puiseuxschen Polygons der Gleichung (I.) *in bezug auf P werden dann und nur dann durch die zu den Potenzen*

$$z^n,\ z^{n-k_1},\ z^{n-k_1-k_2},\ \dots\ z^{n-(k_1+k_2+\cdots+k_s)} = 1$$

gehörigen Punkte geliefert, wenn die Ordnungszahlen der Koeffizienten den Bedingungen

$$r_{k_1+k_2+\cdots+k_i} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i, \qquad (i=1,2,\dots s)$$

$$r_{k_1+k_2+\cdots+k_{i+1}+l} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + l\frac{\alpha_i}{k_i} \qquad \binom{i=1,2,\dots s}{l=1,2,\dots k_i-1}$$

genügen, wo α_1 eine nicht negative rationale ganze Zahl ist, während die übrigen α positive rationale ganze Zahlen sind, welche noch die Ungleichungen

$$\frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_2}{k_2} < \cdots < \frac{\alpha_s}{k_s}$$

erfüllen. Die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung werden der Reihe nach durch die Zahlen

$$\frac{\alpha_1}{k_1},\ \frac{\alpha_2}{k_2},\ \dots\ \frac{\alpha_s}{k_s}$$

gegeben.

§ III.

1. Aus der Definition folgt, und das ist sehr wesentlich, daß die charakteristischen Zahlen einer ganzen Größe w in bezug auf P *unverändert* bleiben, wenn an Stelle von (I') irgend ein Gattungsbereich zugrunde gelegt wird, der den Bereich (I') enthält. Es sei jetzt $(\overline{I'})$ ein Gattungsbereich, der sämtliche Bereiche, welche durch die Wurzeln

$$(1.) \qquad w^{(1)},\ w^{(2)},\ \dots\ w^{(n)}$$

der Gleichung (I.) bestimmt werden, als untergeordnete Bereiche enthält. Es sollen in $(\overline{I'})$ die Zerlegungen bestehen:*)

*) Die hier auftretenden Exponenten sind natürlich im allgemeinen nicht gleich den im § I auftretenden.

$$(2.)\quad \begin{cases} P = \overline{\mathfrak{P}}_1^{e_1}\overline{\mathfrak{P}}_2^{e_2}\cdots\overline{\mathfrak{P}}_\nu^{e_\nu}, \\ w^{(\lambda)} = \overline{\mathfrak{P}}_1^{a_1^{(\lambda)}}\overline{\mathfrak{P}}_2^{a_2^{(\lambda)}}\cdots\overline{\mathfrak{P}}_\nu^{a_\nu^{(\lambda)}}\mathfrak{Q}^{(\lambda)}, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}^{(\lambda)}) = 1. \end{cases}$$

Es sind sonach die Ordnungen der Wurzeln $w^{(\lambda)}$ in bezug auf $\overline{\mathfrak{P}}_i$:

$$(3.)\qquad a_i^{(\lambda)} = e_i\frac{a_i^{(\lambda)}}{e_i} = e_i R_i^{(\lambda)}. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\lambda=1,2,\dots n\\ i=1,2,\dots\nu\end{smallmatrix}\right)$$

Aus dem vorhergehenden ist bekannt, daß $R_i^{(\lambda)}$ nur die Werte

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \frac{\alpha_2}{k_2}, \cdots \frac{\alpha_s}{k_s}$$

annehmen kann.

2. *Wir werden beweisen, daß, im Falle i konstant bleibt, die Anzahl jener Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, welche den Wert $\frac{\alpha_j}{k_j}$ besitzen, gleich k_j ist.*

Vorerst läßt sich beweisen, daß die Anzahl der Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, deren Wert $\frac{\alpha_1}{k_1}$ ist, nicht kleiner als k_1 sein kann. Wäre es nicht so, so würde aus der Theorie der symmetrischen Formen

$$(4.)\qquad \bar{r}_{k_1} > \alpha_1 e_i, \quad \frac{\bar{r}_{k_1}}{e_i} > \alpha_1$$

folgen, wo $\bar{r}_{k_1}$ die Ordnung des Koeffizienten c_{k_1} in bezug auf $\overline{\mathfrak{P}}_i$ bedeutet. Es ist jedoch

$$(4^*.)\qquad r_{k_1} = \frac{\bar{r}_{k_1}}{e_i} = \alpha_1,$$

eine Relation, welche der vorletzten widerspricht. Nehmen wir an, es sei die fragliche Anzahl gleich

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_f + l.$$

Diese Annahme wird sich auch als unhaltbar erweisen, wenn nur nicht

$$f = 1, \quad l = 0$$

gesetzt wird. Es folgt nämlich jetzt aus der Theorie der symmetrischen Formen für die Ordnung des Koeffizienten $c_{k_1+k_2+\cdots k_f+l}$ in bezug auf P:

$$r_{k_1+k_2+\cdots+k_f+l} = \frac{\bar{r}_{k_1+k_2+\cdots+k_f+l}}{e_i} = \frac{\alpha_1}{k_1}(k_1 + k_2 + \cdots + k_f + l).$$

Und so würde sich aus den Ungleichungen

$$\frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_1}{k_1} < \cdots < \frac{\alpha_s}{k_s}$$

die Ungleichung

$$(5.)\qquad r_{k_1+k_2+\cdots+k_f+l} < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_f + l\frac{\alpha_{f+1}}{k_{f+1}}$$

ergeben. Die Relation (5.) widerspricht aber den Prämissen, nach welchen

$$(5^*.)\qquad r_{k_1+k_2+\cdots+k_f+l} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_f + l\frac{\alpha_{f+1}}{k_{f+1}}$$

ist.

3. Wir werden jetzt eine vollständige Induktion anwenden. Sei die Anzahl jener Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, welche den Wert $\frac{\alpha_1}{k_1}$ besitzen, gleich k_1, die Anzahl jener Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, welche den Wert $\frac{\alpha_2}{k_2}$ besitzen, gleich k_2 usw.; die Anzahl jener Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, welche den Wert $\frac{\alpha_{j-1}}{k_{j-1}}$ besitzen, gleich k_{j-1}. Es ist vorerst die Anzahl jener Zahlen $R_i^{(\lambda)}$, welche den Wert $\frac{\alpha_j}{k_j}$ besitzen, nicht kleiner als k_j. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde sich aus der Theorie der symmetrischen Formen für die Ordnung des Koeffizienten $c_{k_1+k_2+\cdots+k_j}$ in bezug auf P

$$(6.)\qquad r_{k_1+k_2+\cdots+k_j} = \frac{\bar{r}_{k_1+k_2+\cdots+k_j}}{e_i} > \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_j$$

ergeben im Widerspruche mit der Tatsache

$$(6.^*)\qquad r_{k_1+k_2+\cdots+k_j} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j.$$

Nehmen wir an, daß die fragliche Anzahl gleich

$$k_j + \cdots k_g + l$$

ist. Diese Annahme wird sich auch als unhaltbar erweisen, wenn nur nicht

$$g = j,\ l = 0$$

gesetzt wird. Es folgt jetzt nämlich aus der Theorie der symmetrischen Formen

$$r_{k_1+\cdots+k_j+\cdots+k_g+l} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{j-1} + \frac{\alpha_j}{k_j}(k_j + \cdots + k_g + l),$$

und so wäre:

$$(7.) \qquad r_{k_1+\cdots+k_j+\cdots+k_g+l} < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j + \cdots + \alpha_g + l\,\frac{\alpha_{g+1}}{k_{g+1}},$$

was jedoch der Prämisse

$$(7^*.) \qquad r_{k_1+\cdots+k_j+\cdots+k_g+l} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j + \cdots + \alpha_g + l\,\frac{\alpha_{g+1}}{k_{g+1}}$$

widerspricht. Es ist somit dargetan, daß *die möglichen charakteristischen Zahlen in der Tat ohne Ausnahme auftreten.*

§ IV.

1. Sei irgend eine charakteristische Zahl der ganzen Größe w, die den Gattungsbereich (I') bestimmt, in bezug auf die Größe P gleich

$$(1.) \qquad \frac{\alpha}{k} = Ch,$$

wo α und k positive ganze rationale Zahlen bedeuten. *Wenn noch im Sinne der Äquivalenz*

$$(2.) \qquad (\alpha, k) = 1$$

ausfällt, so ist der Grad des Bereiches nicht kleiner als die Zahl k. Es bestehen nämlich im Bereiche (I') die Zerlegungen:

$$(3.) \qquad \begin{cases} P = \mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{P}_i^{e_i}\ldots\mathfrak{P}_r^{e_r}, \\ w = \mathfrak{P}_1^{a_1}\mathfrak{P}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{P}_i^{a_i}\ldots\mathfrak{P}_r^{a_r}\mathfrak{Q}, \quad (P, \mathfrak{Q}) = 1, \end{cases}$$

woraus

$$a_i k = e_i \alpha$$

folgt, daher wird nach (2.)

$$(4.) \qquad e_i \equiv 0 \pmod{k},$$

und so tritt unsere Behauptung in Evidenz.

2. Wenn wir dieses Resultat verallgemeinern und mit dem vorhergehenden kombinieren, erhalten wir den folgenden Satz.

Wenn die Koeffizienten der Gleichung (I.) *den im* § II *angeführten Bedingungen genügen und außerdem noch im Sinne der Äquivalenz*

$$(\alpha_i, k_i) = 1 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots s)}$$

ausfällt, so sind die Grade der irreduziblen Faktoren von der Gestalt:

$$n_{i_1 i_2 \dots i_\varrho} = k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_\varrho}.$$

Es ist ferner

$$n = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\varrho} n_{i_1 i_2 \dots i_\varrho},$$

wo die Kombinationen

(K_ϱ) $(i_1\, i_2 \dots i_\varrho)$

nur Zahlen aus der Reihe

(S) $1, 2, \dots s$

enthalten, und zwar in solcher Weise, daß jede Zahl (S) *einmal und nur einmal unter den Kombinationen* (K_ϱ) *auftritt.*

Wir erwähnen an dieser Stelle, daß es Herr *Königsberger* war, der zuerst die Gleichungen (I.) behandelte; derselbe beschäftigte sich in mehreren Arbeiten eingehend mit den Reihenentwicklungen der algebraischen Funktionen.*)

2. Der Beweis des vorigen Satzes enthält auch geometrische Elemente, welche bei der Bestimmung der *Puiseux*schen Zahlen auftraten. Jedoch kann die geometrische Vorstellung beim Beweise vermieden werden. Wir werden nämlich einen Hilfssatz herleiten um die möglichen charakteristischen Zahlen ohne Kenntnis der *Puiseux*schen Zahlen zu bestimmen.**) Der Satz ist der folgende.

Wenn die Größe w die Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_k z^{n-k} + \cdots + C_n = 0$$

*befriedigt, deren Koeffizienten ganze algebraische***) Größen sind, welche dem holoiden Bereiche* $[(A), x_1, x_2, \dots x_m]$ *oder* $[[1], x_1, x_2, \dots x_m]$ *entstammen und die Gestalt*

$$C_i = P^{\frac{ai}{k}} \overline{C}_i \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

besitzen, wo P eine rationale ganze Primgröße, $\overline{C}_i$ *eine ganze algebraische*

---

*) Die hier in Betracht kommende Arbeit befindet sich in diesem Journal Bd. 121, S. 320—359.

**) Auch das *Puiseux*sche Verfahren kann rein arithmetisch gefaßt und begründet werden, was anderswo ausgeführt werden soll.

***) Also nicht notwendig rationale.

Größe des Bereiches und a eine nicht negative rationale ganze Zahl bedeuten, dann ist

$$(5.)\qquad w^k \equiv 0 \pmod{P^a}.$$

Besitzt ferner die Größe P im Bereiche (Γ), der durch w bestimmt wird, einen Primfaktor $\mathfrak{P}_w$, in bezug auf welchen

$$(6.)\qquad \frac{w^k}{P^a} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_w}$$

und im Sinne der Äquivalenz

$$(6^*.)\qquad (\overline{C}_k, \mathfrak{P}_w) = 1$$

ist, so läßt sich in dem Bereiche, der durch die Größen w und $P^{\frac{1}{k}}$ bestimmt wird, eine ganze Größe D finden, die gegen $\mathfrak{P}_w$ relativ prim ist und die Eigenschaft aufweist, daß das Produkt Dw eine Wurzel der Gleichung

$$(\text{II}^*.)\qquad x^{n-k} + \frac{C_{k+1}}{P^a} x^{n-k-1} + \frac{C_{k+2}}{P^a} D x^{n-k-2} + \cdots + \frac{C_n}{P^a} D^{n-k-1} = 0$$

bildet.

2. Um den Beweis zu leisten, dividieren wir die Gleichung (II.) durch $\left(P^{\frac{a}{k}}\right)^n$, man erhält:

$$(7.)\qquad \left(\frac{z}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^n + \frac{C_1}{P^{\frac{a}{k}}}\left(\frac{z}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{C_k}{P^a}\left(\frac{z}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-k} + \cdots + \frac{C_n}{\left(P^{\frac{a}{k}}\right)^n} = 0.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung ganze Größen sind, erweist sich (5.) als richtig. Andererseits ist

$$\left(\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^n + \frac{C_1}{P^{\frac{a}{k}}}\left(\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{C_k}{P^a}\left(\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-k}\left(\frac{C_k}{P^a} + B\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right) = \left(\frac{w}{P^{\frac{a}{k}}}\right)^{n-k} D,$$

wo die ganzen Größen B und D dem Bereiche (Γ''), der durch w und $P^{\frac{1}{k}}$ bestimmt wird, angehören. Das Ideal $\mathfrak{P}_w$ ist natürlich auch im Bereiche (Γ') enthalten, nur bleibt es eventuell kein Primideal. Es ist aber nach (6.) und (6*.) im Sinne der Äquivalenz

(8.) $$(D, \mathfrak{P}_w) = 1.$$

Es ist noch ferner die Größe $\frac{w}{p^{\frac{\alpha}{k}}}$ eine Wurzel der Gleichung

(9.) $$Dy^{n-k} + \frac{C_{k+1}}{\left(p^{\frac{\alpha}{k}}\right)^{k+1}} y^{n-k-1} + \cdots + \frac{C_n}{\left(p^{\frac{\alpha}{k}}\right)^n} = 0,$$

folglich genügt das Produkt Dw tatsächlich der Gleichung (II*).

4. Durch mehrmalige Anwendung des soeben bewiesenen Hilfssatzes, worauf wir hier nicht weiter eingehen, ersieht man, daß die möglichen charakteristischen Zahlen der Wurzeln der Gleichung (I.) im Falle, daß die Ordnungen der Koeffizienten den bekannten Bedingungen genügen, gleich den Zahlen

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \frac{\alpha_2}{k_2}, \cdots \frac{\alpha_s}{k_s}$$

sind. Man bekommt sogar das *scheinbar* allgemeinere Resultat, daß dies auch dann bestehen bleibt, wenn nur

$$\frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_2}{k_2} \leq \cdots < \frac{\alpha_s}{k_s}$$

ist. Jedoch ist dieses Resultat in Wirklichkeit in unseren früheren Sätzen enthalten. Wäre nämlich z. B.

$$\frac{\alpha_1}{k_1} = \frac{\alpha_2}{k_2} < \frac{\alpha_3}{k_3},$$

dann gehören nach § II die Eckpunkte der ersten Seite des Polygons zu den Potenzen

$$z^n, \; z^{n-(k_1+k_2)},$$

während der durch die Potenz z^{n-k_1} gelieferte Punkt auf der Seite liegt. Die betreffende *Puiseux*sche Zahl ist:

$$\frac{\alpha_2}{k_2} = \frac{\alpha_1}{k_1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{k_1 + k_2}.$$

5. Wir wollen zum Schlusse noch zeigen, auf welche Weise ein von Herrn *Netto**) bewiesener Satz aus unseren Betrachtungen folgt. Der Satz lautet:

*) Math. Annalen Bd. 48, S. 85.

Wenn in dem Polynome

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-k} z^k + \cdots + c_n$$

alle Koeffizienten c_i durch p teilbar sind, c_{n-k} aber durch keine höhere Potenz als die erste, dann besitzt es einen irreduziblen Faktor, dessen Grad nicht kleiner als $n-k$ ist.

Nach den Voraussetzungen ist das *Puiseux*sche Polygon in bezug auf p so beschaffen, daß die erste *Puiseux*sche Zahl positiv und nicht größer als $\frac{1}{n-k}$ ist. Daraus folgt vorerst, daß für sämtliche charakteristischen Zahlen

$$\frac{a_i}{e_i} = Ch_i$$

der Wurzeln

$$a_i \geqq 1$$

ausfällt. Es existiert ferner ein Index i, in bezug auf welchen

$$\frac{a_i}{e_i} \leqq \frac{1}{n-k}$$

ist, woraus

$$e_i \geqq n-k$$

und so der zu beweisende Satz folgt.

Über Gleichungen ohne Affekt.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

1. Herr *D. Hilbert* bewies zum ersten Male, daß im Bereiche der rationalen Zahlen unbegrenzt viele Gleichungen n-ten Grades ohne Affekt existieren.*) Diese Tatsache ergibt sich auch aus den folgenden Betrachtungen, welche sich auf die vorstehende Arbeit stützen. Zu gleicher Zeit werden wir ein leichtes Verfahren zur Bildung solcher Gleichungen gewinnen.

Der Untersuchung wird die Gleichung

$$(I.) \qquad z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

zugrunde gelegt, deren Koeffizienten rationale ganze Größen des holoiden Bereiches $[(A), x_1, x_2, \dots x_m]$ bezw. $[[1], x_1, x_2, \dots x_m]$ sind. Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$(1.) \qquad w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(n)},$$

es sei ferner N die Ordnung der n-buchstäbigen *Galois*schen Gruppe der Gleichung, welche aus den Elementen

$$(2.) \qquad S_1 = 1, S_2, \dots S_N$$

bestehe. Die Wurzeln (1.) bestimmen den *Galois*schen Gattungsbereich $(\bar{\Gamma})$. Nun läßt sich nach bekannten Methoden feststellen, daß jede Primgröße P im Bereiche $(\bar{\Gamma})$ eine Zerlegung von der Gestalt

$$(3.) \qquad P = (\prod_i \mathfrak{P}_i)^e$$

*) Über die Irreduzibilität usw., dieses Journal Bd. 110, S. 104—129. Vergl. noch *Weber:* Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I, S. 652—655, ferner eine Arbeit von *E. Maillet*: Journal de Mathématiques V (1899), S. 205—216 und einen von *Frobenius* (Berl. Sitzungsber. 1896, S. 697) mitgeteilten Satz von *Dedekind*.

besitzt, wo die Buchstaben $\bar{\mathfrak{p}}_i$ verschiedene Primideale bezeichnen. Sämtliche Primfaktoren werden aus irgend einem durch die Anwendung der Substitutionen (2.) erzeugt. Zu jedem Ideal $\bar{\mathfrak{p}}_i$ gehört eine Untergruppe, welche es unverändert läßt und deren Ordnung durch e teilbar ist. Ist daher q eine gewöhnliche Primzahl, welche die Bedingung

$$(3^*.) \qquad e \equiv 0 \qquad (\text{mod. } q)$$

erfüllt, so sind die Ordnungen der eben erwähnten Untergruppen durch q teilbar, folglich enthalten dieselben nach dem *Cauchy-Sylow*schen Satze Substitutionen von der Ordnung q.

2. Nun werden wir den folgenden Satz beweisen. *Sind die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung* (I.) *in bezug auf die Primgröße P gleich*

$$(4.) \qquad \frac{\alpha_1}{k_1}, \frac{\alpha_2}{k_2}, \dots \frac{\alpha_{n-q+1}}{k_{n-q+1}},$$

wo

$$\alpha_j > 0, \ (\alpha_j, k_j) = 1 \qquad (j=1,2,\dots n-q+1)$$

ausfällt und unter den Zahlen k_j eine gleich q, die übrigen dagegen gleich Eins sind; dann enthält die n-buchstäbige Galoissche Gruppe der Gleichung auch solche Substitutionen, welche aus einem einzigen q-lettrigen Zykel bestehen. Es sollen im Bereiche $(\bar{\Gamma})$ die Zerlegungen:

$$P = (\prod_i \bar{\mathfrak{p}}_i)^e,$$

$$w^{(\lambda)} = \prod_i \bar{\mathfrak{p}}_i^{a_i^{(\lambda)}} \mathfrak{A}^{(\lambda)}, \ (\mathfrak{A}^{(\lambda)}, P) = 1 \qquad (\lambda=1,2,\dots n)$$

gelten. Dann existieren nach unseren Prämissen solche Indexe i und λ, welche die Relation

$$\frac{a_i^{(\lambda)}}{e} = \frac{\alpha_s}{q}$$

erfüllen, woraus

$$e \equiv 0 \ (\text{mod. } q)$$

folgt. Infolgedessen enthält die Untergruppe, welche z. B. $\bar{\mathfrak{p}}_i$ unverändert läßt, auch eine Substitution S von der Ordnung q. Nun läßt sich dartun, daß S aus einem einzigen q-lettrigen Zykel besteht. Die Werte

$$(5.) \qquad \frac{a_i^{(\lambda)}}{e}, \qquad (\lambda=1,2,\dots n)$$

sind nämlich gleich den Zahlen (4.) und zwar ist k_j die Anzahl derjenigen Werte (5.), welche gleich $\frac{\alpha_j}{k_j}$ sind. Hieraus folgt nach den Voraussetzungen, daß, wenn nur die Bezeichnung geeignet gewählt ist, unter den Wurzeln

(1.) $$w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(n)}$$

die Wurzeln

(1*.) $$w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(q)}$$

durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}_i$ teilbar sind, dagegen sämtliche übrigen Wurzeln

(1**.) $$w^{(q+1)}, w^{(q+2)}, \dots w^{(n)}$$

von einander verschiedene Potenzen von $\overline{\mathfrak{p}}_i$ enthalten. Da die Substitution S die Wurzeln $w^{(\lambda)}$ in einander, das Ideal $\overline{\mathfrak{p}}_i$ in sich selbst überführt und da noch q eine Primzahl ist, so ist evident, daß S die angegebene Gestalt besitzt.

3. Nun ist es leicht, Gleichungen ohne Affekt zu bilden. Es sei vorerst n eine Primzahl. Wir sorgen zuerst dafür, daß die Gleichung (I.) irreduzibel ist; z. B. dadurch, daß sie in bezug auf die Primgröße P_1 die einzige *Puiseux*sche Zahl

$$\frac{\alpha}{n}, \quad (\alpha, n) = 1, \quad \alpha > 0$$

besitze. Dann aber sorgen wir dafür, daß die Gruppe (2.) eine Transposition enthält. Dies wird erfüllt, wenn die *Puiseux*schen Zahlen der Gleichung in bezug auf eine Primgröße P_2 gleich den Zahlen (4.) gewählt werden und $q = 2$ gesetzt wird. Ist der Grad n keine Primzahl, so muß noch die Primitivität der Gruppe gesichert werden. Das wird aber sicher erreicht, wenn sie z. B. Substitutionen, bestehend aus einem einzigen q-lettrigen Zykel, enthält, wo die Primzahl q der Bedingung

$$\frac{n}{2} < q < n$$

genügt. Diese letzte Ungleichung kann nach einem Satze von *Tchebichef* erfüllt werden, und nach den vorigen kann man die Existenz einer solchen Substitution in der Gruppe in der Tat erreichen.

Untersuchungen über die geodätische Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf einander.

Von Herrn *Rudolf Rothe* in Charlottenburg.

Die Aufgabe, zwei Flächen konstanten Krümmungsmaßes so auf einander abzubilden, daß den geodätischen Linien der einen Fläche die der anderen entsprechen, ist durch den bekannten Satz von *Beltrami**) vollständig gelöst, nach welchem eine jede solche Fläche auf eine Ebene derart abgebildet werden kann, daß den geodätischen Linien der Fläche die Geraden der Ebene entsprechen. Man hat danach zur Lösung der obigen Aufgabe die beiden Flächen auf je eine Ebene im *Beltrami*schen Sinne abzubilden, und die beiden Ebenen in allgemeinster Weise auf einander projektivisch zu beziehen.

Bei näherer Betrachtung dieser Aufgabe zeigt sich, daß der bei dem allgemeinen Problem zurücktretende Unterschied zwischen den Flächen mit euklidischer Geometrie (von verschwindendem Krümmungsmaß) und denen mit sphärischer oder pseudosphärischer Geometrie wieder deutlich hervortritt, sobald die Art der geodätischen Abbildung näher spezialisiert wird.

Von diesem Gesichtspunkte aus sind die nachstehenden Untersuchungen angestellt. Ihren Ausgangspunkt bildet der Satz von *Dini*,**) daß eine reelle Fläche stets und nur dann eine geodätische Abbildung auf eine andere Fläche zuläßt, wenn sie zu den *Liouville*schen Flächen gehört, d. h. wenn ihr Linienelement auf die Form

$$\sqrt{(U-V)(du^2+dv^2)}$$

---

*) *E. Beltrami*, Annali di Matematica (1) 7, 1866, p. 185.
**) *U. Dini*, Annali di Matematica (2) 8, 1869, p. 269.

gebracht werden kann. Bei der Anwendung dieses Satzes auf die Flächen konstanten Krümmungsmaßes ist man somit zunächst vor die Aufgabe gestellt, in allgemeinster Weise das Linienelement der Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf die vorstehende Form zu bringen. Diese Aufgabe ist von Herrn *Darboux**) gelegentlich einer die Theorie der partiellen Differentialgleichungen betreffenden Frage vollständig gelöst worden; jedoch ist bereits in der Arbeit des Herrn *H. A. Schwarz***) über die konforme Abbildung einer Halbkugel auf ein Rechteck die in Rede stehende *Form* des Linienelements der Kugel in allgemeinster Weise angegeben. Im folgenden wird noch einmal auf diese Aufgabe eingegangen, sodann der analytische Zusammenhang mit der geodätischen Bildfläche in den Kreis der Betrachtungen gezogen und ferner die Untersuchung auf die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung ausgedehnt.

Unter der Bezeichnung „Fläche" schlechtweg sollen solche hinreichend begrenzten reellen Flächenstücke verstanden werden, welche im Innern und im allgemeinen auch an der Begrenzung singularitätenfrei sind. Sie sollen auf einander geodätisch abgebildet heißen, wenn die Gesamtheit der geodätischen Linien der einen Fläche der Gesamtheit der geodätischen Linien der anderen Fläche entspricht; auf einander abwickelbare Flächen werden aber von der Betrachtung ausgeschlossen.

I.

Aus den Untersuchungen des Herrn *Dini* geht hervor, daß, wenn zwei Flächen $(\mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{F}')$ auf einander geodätisch abgebildet werden können, es stets möglich ist, die Quadrate ihrer Linienelemente auf die Formen

$$(1.) \qquad dl^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

$$(2.) \qquad dl'^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right)$$

*) *G. Darboux*, Théorie générale des surfaces, t. II. p. 211. — Man vergleiche ferner hierzu die von Herrn *G. Koenigs* mitgeteilte Tabelle II seiner Abhandlung Sur les géodésiques à intégrales quadratiques, welche dem *Darboux*schen Werke als Note II angehängt ist (t. IV, p. 379).

**) *H. A. Schwarz*, Göttinger Nachr. 1883, S. 51, Gesammelte Abhandlungen II, S. 320.

zu bringen, unter U, V zwei von u bzw. v allein abhängige reelle Funktionen verstanden, von denen keine beständig gleich Null ist. Vermöge der Substitution

$$U \,\|\, \frac{1}{U}, \qquad V \,\|\, \frac{1}{V}; \qquad du \,\|\, \frac{i\,du}{\sqrt{U}}, \qquad dv \,\|\, \frac{i\,dv}{\sqrt{V}}$$

geht die eine Fläche in die andere über.

Wie Herr *Darboux**) bemerkt hat, kann auf die Fläche $(\mathfrak{F})$ außer der Fläche $(\mathfrak{F}')$ vom Linienelement dl' jede Fläche $(\bar{\mathfrak{F}})$ geodätisch abgebildet werden, für welche das Quadrat des Linienelements die Form

$$(3.) \qquad d\bar{l}^2 = \left(\frac{1}{V+h} - \frac{1}{U+h}\right)\left(\frac{du^2}{U+h} + \frac{dv^2}{V+h}\right) \qquad .$$

besitzt, unter h eine beliebige Konstante verstanden; $d\bar{l}$ ist im allgemeinen von dl' verschieden.

Jede dieser Flächen $(\bar{\mathfrak{F}})$ soll als *geodätisches Bild* von $(\mathfrak{F})$ bezeichnet werden.

Werden vier Funktionen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{U}$, $\bar{V}$ vermöge der Gleichungen

$$(4.) \qquad \bar{u} - \bar{u}_0 = \int_{u_0} \frac{i\,du}{\sqrt{U+h}}, \qquad \bar{v} - \bar{v}_0 = \int_{v_0} \frac{i\,dv}{\sqrt{V+h}},$$

$$(5.) \qquad \bar{U} + \bar{h} = \frac{1}{U+h}, \qquad \bar{V} + \bar{h} = \frac{1}{V+h}$$

eingeführt, unter u_0, v_0, $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{h}$ beliebige Konstanten verstanden, so entstehen an Stelle der Formeln (1.) und (3.) die folgenden:

$$d\bar{l}^2 = (\bar{U} - \bar{V})\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$
$$dl^2 = \left(\frac{1}{\bar{V}+\bar{h}} - \frac{1}{\bar{U}+\bar{h}}\right)\left(\frac{d\bar{u}^2}{\bar{U}+\bar{h}} + \frac{d\bar{v}^2}{\bar{V}+\bar{h}}\right);$$

sie lassen erkennen, daß die Beziehung der Flächen $(\mathfrak{F})$ und $(\bar{\mathfrak{F}})$ auf einander eine wechselseitige ist.

Bedeutet k das *Gauß*sche Krümmungsmaß der Fläche $(\mathfrak{F})$, so gilt die Formel

$$(6.) \qquad 2k\,(U-V)^3 = U'^2 + V'^2 - (U-V)\,(U'' - V''),$$

*) a. a. O. III, S. 51.

in der unter U', U'', V', V'' die Ableitungen der Funktionen U, V nach den Argumenten u, v verstanden werden.

Das in den Formeln (1.) und (3.) auftretende krummlinige Koordinatensystem (u, v) entspricht bei der geodätischen Abbildung sich selbst; nach einem Satze von *Tissot*,*) auf den sich die *Dini*sche Beweisführung stützt, gibt es kein zweites derartiges Orthogonalsystem.

Zu den Flächen, welche eine wechselseitige geodätische Abbildung zulassen, gehören die Biegungen der Rotationsflächen, nämlich in dem Fall, wenn *eine* der beiden Funktionen U, V einer Konstanten gleich ist. Ist z. B. V konstant, so stellen die Koordinatenlinien $v = \text{konst.}$ eine Schar von geodätischen Linien dar, das System (u, v) ist das orthogonal-geodätische System der Meridiane und Breitenkreise.

Nach diesen Vorbemerkungen sollen die Bedingungen aufgestellt werden, denen die Funktionen U, V zu unterwerfen sind, damit die Fläche $(\mathfrak{F})$ konstantes Krümmungsmaß besitze.

In diesem Falle muß die Gleichung (6.) für einen beliebig gegebenen konstanten Wert von k erfüllt sein, der positiv oder negativ sein kann, aber als von Null verschieden vorausgesetzt wird. Durch Differentiation nach u und sodann nach v ergibt sich aus der erwähnten Gleichung

$$-12\,k\,U'V'(U-V) = V'U''' + U'V'''.$$

Man nehme nun zunächst an, daß keine der beiden Funktionen U', V' für alle Werte ihres Arguments gleich Null sei; durch diese Annahme werden diejenigen Fälle, in denen das Linienelement die den Rotationsflächen zukommende Form annimmt, von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der vorstehenden Gleichung die weitere

$$\frac{U'''}{U'} + 12\,k\,U = -\frac{V'''}{V'} + 12\,k\,V,$$

welche nur bestehen kann, wenn die auf der linken und die auf der rechten Seite stehenden Größen einer und derselben reellen Konstanten gleich sind, welche mit $12c$ bezeichnet werden soll. Auf diese Weise ergibt sich für jede der beiden Funktionen $U(u)$, $V(v)$ eine Differentialgleichung, welche eine zweimalige Quadratur zuläßt,

*) *A. Tissot*, Comptes rendus 49, 1859, p. 673.

$$U'' = -6kU^2 + 12cU + C, \qquad V'' = 6kV^2 - 12cV + C',$$
$$U'^2 = -4kU^3 + 12cU^2 + CU + 4\varkappa, \quad V'^2 = 4kV^3 - 12cV^2 + C'V + 4\varkappa',$$

unter C, C', $\varkappa$, $\varkappa'$ reelle Integrationskonstanten verstanden. Durch Einsetzen dieser Werte für U', U'', V', V'' in die Ausgangsgleichung (6.) überzeugt man sich, daß die Integrationskonstanten den Bedingungen

$$C = C' = 0, \qquad \varkappa' = -\varkappa$$

zu unterwerfen sind. Die Funktionen U, V genügen also den Gleichungen

$$U'^2 = -4kU^3 + 12cU^2 + 4\varkappa, \tag{7.}$$
$$V'^2 = +4kV^3 - 12cV^2 - 4\varkappa, \tag{8.}$$

von denen die zweite aus der ersten dadurch hervorgeht, daß U durch V, u durch iv ersetzt wird.

Die Aufgabe, das Quadrat des Linienelements der Flächen konstanten Krümmungsmaßes in allgemeinster Weise in der *Liouville*schen Form zu bestimmen, führt also auf elliptische Funktionen.

Für das Folgende bediene ich mich hinsichtlich des Gebrauchs der elliptischen Funktionen der Theorie und Bezeichnungsweise von *Weierstraß* und führe demnach drei Größen s, g_2, g_3 durch die Gleichungen

$$s = -kU + c, \tag{9.}$$
$$g_2 = 12c^2, \tag{10.}$$
$$g_3 = -8c^3 - 4k^2\varkappa \tag{11.}$$

in die Rechnung ein, was stets möglich ist, solange k, wie vorausgesetzt wurde, nicht verschwindet. Hierdurch geht aus der Gleichung (7.) die nachstehende hervor

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

durch welche die elliptische Funktion $s = \wp u = \wp(u; g_2, g_3)$ definiert wird. Dabei ist eine zum Argument u additiv hinzutretende Konstante unterdrückt worden, was hier ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann. Danach wird

$$U = -\frac{1}{k}\wp u + \frac{c}{k}, \qquad V = -\frac{1}{k}\wp(iv) + \frac{c}{k}. \tag{12.}$$

Die additive Konstante $\frac{c}{k}$ ist nach dem oben gesagten für den Wert der Größen U, V nicht wesentlich.

Die allgemeinste Liouvillesche Form des Quadrats des Linienelements einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß k ist daher

$$dl^2 = -\frac{1}{k}(\wp u - \wp(iv))(du^2 + dv^2), \tag{13.}$$

unter $\wp u$ eine Pefunktion mit beliebigen, vom Krümmungsmaß unabhängig zu wählenden Invarianten verstanden.

Da übrigens die Konstanten c und $\varkappa$ stets reelle Werte annehmen sollen, so sind auch die Invarianten g_2, g_3 stets reell, daher ist auch $\wp u$ für reelle Werte von u stets reell, und da die Pefunktion eine gerade Funktion ihres Arguments ist, auch $\wp(iv)$ für reelle Werte von v. Verändert man den Maßstab der Variablen u, v, d. h. ersetzt man

$$u, \quad v, \quad g_2, \quad g_3$$

durch

$$\frac{u}{m}, \quad \frac{v}{m}, \quad m^4 g_2, \quad m^6 g_3,$$

wo m eine Konstante bedeutet, so ändert sich die Pefunktion vermöge der Formel

$$\wp\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right) = m^2 \wp(u; g_2, g_3)$$

um den konstanten Faktor m^2, während das Quadrat des Linienelements selbst unverändert bleibt.

Nun gilt für die Pefunktion das Additionstheorem

$$\wp(w + w_1) - \wp(w - w_1) = -\frac{\wp' w \, \wp' w_1}{(\wp w - \wp w_1)^2}. \tag{14.}$$

Führt man also an Stelle der reellen Veränderlichen u, v die konjugiert-komplexen

$$u + iv = 2w,$$
$$u - iv = 2w_1$$

ein, so geht zufolge der vorstehenden Formel (14.) das Quadrat des Linienelements der betrachteten Fläche in die Form

$$dl^2 = \frac{4}{k} \frac{\wp' w \, \wp' w_1}{(\wp w - \wp w_1)^2} \, dw \, dw_1$$

über und wird weiter durch die Substitution

$$\wp w = \alpha, \qquad \wp w_1 = \alpha_1$$

auf die bekannte Form

$$(15.) \qquad dl^2 = \frac{4}{k} \frac{d\alpha \, d\alpha_1}{(\alpha - \alpha_1)^2}$$

transformiert. Diese stellt eine konforme Abbildung der Fläche auf die Ebene der komplexen Variablen α derart dar, daß den geodätischen Linien die Kreise

$$\alpha\alpha_1 + p(\alpha + \alpha_1) + q = 0$$

entsprechen, woraus folgt, daß bei der Darstellung der Fläche durch die Parameter u, v die geodätischen Linien durch die Gleichung

$$\left(\wp \frac{u+iv}{2} - a\right)\left(\wp \frac{u-iv}{2} - a\right) = b$$

gegeben sind; p, q bezw. a, b bedeuten die Parameter der geodätischen Linien.

Andrerseits wird durch Einführung der Sigmafunktion vermöge der Formel

$$\wp u - \wp(iv) = -\frac{\sigma(u+iv)\,\sigma(u-iv)}{\sigma^2 u \, \sigma^2(iv)}$$

das Quadrat des Linienelements in der Form

$$dl^2 = \frac{1}{k} \frac{\sigma(u+iv)\,\sigma(u-iv)}{\sigma^2 u \, \sigma^2(iv)} (du^2 + dv^2)$$

erhalten.

Nun ist Herr *H. A. Schwarz**) bei der Lösung der Aufgabe, die Fläche eines ebenen Rechtecks auf die Fläche einer Halbkugel konform abzubilden, zu nachstehender Form des Quadrats des Linienelements der Kugel gelangt:

$$dl^{*2} = 4R^2 \frac{\sigma(2u^* + 2iv^*)\,\sigma(2u^* - 2iv^*)}{\sigma_2^2(2u^*)\,\sigma_2^2(2iv^*)} \cdot (du^{*2} + dv^{*2}).$$

Es läßt sich zeigen, daß diese Form auf die vorstehende zurückgeführt werden kann. Damit ist dann aber bewiesen, daß die Aufgabe, die Fläche

*) Gesammelte Abhandlungen II, S. 324.

einer Halbkugel auf die Fläche eines Rechtecks konform abzubilden, identisch ist mit derjenigen, alle Linienelemente der Flächen konstanter Krümmung in allgemeinster Weise zu ermitteln, welche die *Liouville*sche Form besitzen.*) Jene Zurückführung ist nun in der Tat mit Hilfe der Transformationsformeln der Sigmafunktionen leicht ausführbar. Bezeichnet man nämlich, wie es in der Theorie von *Weierstraß* üblich ist, mit 2ω, $2\omega'$ ein primitives Periodenpaar des Arguments der ℘funktion und setzt

$$\omega'' = \omega + \omega', \quad \eta'' = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega''),$$

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega'' = e_2, \quad \wp\omega' = e_3,$$

$$u - \omega'' = 2u^*$$

$$v - \frac{\omega''}{i} = 2v^*,$$

so bestehen folgende Formeln**)

$$\sigma(u + iv) = -e^{2\eta''(2u^* + 2iv^* + \omega'')} \cdot \sigma(2u^* + 2iv^*),$$

$$\sigma(u - iv) = \sigma(2u^* - 2iv^*),$$

$$\sigma u = e^{2\eta'' u^*} \cdot \sigma\omega'' \cdot \sigma_2(2u^*),$$

$$\sigma(iv) = e^{2\eta'' iv^*} \cdot \sigma\omega'' \cdot \sigma_2(2iv^*),$$

$$\sigma^2\omega'' = -\frac{1}{R} e^{\eta''\omega''},$$

wo $R^2 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$ gesetzt ist. Daraus folgt

$$\frac{\sigma(u + iv)\,\sigma(u - iv)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(iv)} = R^2 \cdot \frac{\sigma(2u^* + 2iv^*)\,\sigma(2u^* - 2iv^*)}{\sigma_2^2(2u^*)\,\sigma_2^2(2iv^*)},$$

$$du^2 + dv^2 = 4(du^{*2} + dv^{*2}).$$

Setzt man also $k = \frac{1}{R^2}$ entsprechend der von Herrn *Schwarz* gemachten Annahme über die Größe des Radius der Halbkugel, so ergibt sich mit Hilfe der vorstehenden Transformationen unmittelbar die Übereinstimmung der

---

*) Der Zusammenhang dieses Problems mit der *Schwarz*schen Abbildungsaufgabe ist übrigens, so nahe er liegt, anscheinend nirgends bemerkt worden.

**) Man erhält sie leicht aus den Gleichungen der Artikel 18 und 22 der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen“ von *H. A. Schwarz*. 2. Ausgabe.

Linienelemente dl und dl^*. Durch den Zusammenhang mit der von Herrn *Schwarz* behandelten Aufgabe ist daher auch die geometrische Bedeutung der im Linienelement dl auftretenden Pefunktion klargestellt.

II.

Ich untersuche nun den analytischen Zusammenhang zweier auf einander geodätisch abgebildeten Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Nach dem oben gesagten gehören zu jeder Fläche $(\mathfrak{F})$ von konstantem Krümmungsmaß unendlich viele geodätische Bildflächen $(\bar{\mathfrak{F}})$, welche von einem Parameter h abhängen. Sei $(\mathfrak{F}')$ die zum Parameter $h=0$ gehörige geodätische Bildfläche. In Übereinstimmung mit einem bekannten Satze von Herrn *Dini* ist es leicht, zu zeigen, daß auch das Krümmungsmaß k' dieser Fläche einen konstanten Wert hat, welcher mit dem Wert der Konstanten $\varkappa$ (Gleichung (11.)) übereinstimmt.

Es empfiehlt sich jedoch von vornherein aus Symmetriegründen, den Parameter h auch für die Fläche $(\mathfrak{F})$ in die Rechnung einzuführen. Zu dem Zweck mache man die Substitution

$$\mathfrak{U} = U + h, \qquad \mathfrak{V} = V + h, \tag{16.}$$

durch welche das Linienelement der Fläche $(\mathfrak{F})$ ungeändert bleibt; dann genügen die Funktionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ zufolge der Gleichungen (7.) und (8.) den Differentialgleichungen

$$\mathfrak{U}'^2 = -4k\,\mathfrak{U}^3 + 12 s_0\,\mathfrak{U}^2 - 12\bar{s}_0\,\mathfrak{U} + 4\bar{k}, \tag{17.}$$

$$\mathfrak{V}'^2 = +4k\,\mathfrak{V}^3 - 12 s_0\,\mathfrak{V}^2 + 12\bar{s}_0\,\mathfrak{V} - 4\bar{k}, \tag{18.}$$

wobei

$$s_0 = -hk + c,$$
$$\bar{s}_0 = h^2 k - 2ch,$$
$$\bar{k} = -kh^3 + 3ch^2 + \varkappa$$

gesetzt und der vorstehende Wert von $\bar{k}$ mit dem Krümmungsmaß der Fläche $(\bar{\mathfrak{F}})$ identisch ist.

Man kann nunmehr durch die Gleichung

$$s - s_0 = -k\,\mathfrak{U} \tag{19.}$$

die elliptische Funktion $s = \wp(u; g_2, g_3)$ in die Rechnung einführen, deren Invarianten bei passender Wahl des Maßstabes der Variablen u, v die Werte

$$(20.) \qquad \begin{cases} g_2 = 12(s_0^2 - \bar{s}_0 k), \\ g_3 = 12\, s_0 \bar{s}_0 k - 8 s_0^3 - 4 k^2 \bar{k} \end{cases}$$

besitzen; diese sind von den vorher durch die Gleichungen (10.) und (11.) gegebenen nicht verschieden, also von der Wahl der Konstanten h unabhängig, wie schon daraus hervorgeht, daß die Substitution (16.) eine lineare ist.

Es sei w_0 eine Nullstelle der Funktion $\mathfrak{U}$; zufolge der Gleichung (19.) ist dann

$$\wp(w_0; g_2, g_3) = s_0,$$

und weil aus den vorstehenden Formeln (20.) die Relation

$$4 s_0^3 - g_2 s_0 - g_3 = 4 k^2 \bar{k}$$

folgt, so ist

$$\wp'(w_0; g_2, g_3) = -2k\sqrt{\bar{k}}.$$

Der Wert w_0 kann daher nicht mit einer der Halbperioden des Arguments von $\wp u$ übereinstimmen, denn sonst wäre k oder $\bar{k}$ gleich Null gegen die Voraussetzung. Wegen der Gleichung

$$\wp(iv) - s_0 = -k\mathfrak{B}$$

ist $\frac{w_0}{i}$ eine Nullstelle der Funktion $\mathfrak{B}$. Setzt man $u + iv = w$, so kann man, da die Invarianten g_2, g_3 reelle Werte besitzen, stets ein Paar primitive Halbperioden ω_1, ω_3 des Arguments w so auswählen, daß entweder die Punkte $0, \omega_1, \omega_2 = \omega_1 + \omega_3, \omega_3$ oder die Punkte $0, \omega_2, 2\omega_3, \omega_3 - \omega_1$ die Ecken eines Rechtecks der Ebene der komplexen Variablen w bilden. Da den Punkten der Begrenzung dieses Rechtecks und nur diesen die reellen Werte von $\wp w$ entsprechen, so ist auch w_0 notwendig auf dieser Begrenzung gelegen.

Durch die Substitutionen (4.) und (5.)

$$\bar{\mathfrak{U}} = \frac{1}{\mathfrak{U}}, \quad \bar{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\mathfrak{B}}, \quad d\bar{u} = \frac{idu}{\sqrt{\mathfrak{U}}}, \quad d\bar{v} = \frac{idv}{\sqrt{\mathfrak{B}}}$$

geht das Quadrat des Linienelements der Fläche $(\bar{\mathfrak{F}})$ in die Form

$$d\bar{l}^2 = (\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{B}})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

über; demnach genügen auch die Funktionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ je einer Differentialgleichung von der Form

$$\bar{\mathfrak{U}}'^2 = -4\bar{k}\,\bar{\mathfrak{U}}^3 + 12 r_0\,\mathfrak{U}^2 - 12\bar{r}_0\,\bar{\mathfrak{U}} + 4k,$$
$$\mathfrak{V}'^2 = \quad 4k\,\mathfrak{V}^3 - 12 r_0\,\mathfrak{V}^2 + 12\bar{r}_0\,\mathfrak{V} - 4k,$$

unter r_0, r_0 konstante Koeffizienten verstanden, deren Werte sich dadurch bestimmen, daß die obige Substitution auf die Gleichungen (17.) und (18.) ausgeübt wird. Man findet

$$r_0 = \bar{s}_0, \qquad \bar{r}_0 = s_0.$$

Die Invarianten der vorstehenden Differentialgleichungen ergeben sich daher bei passender Wahl des Maßstabs der Variablen $\bar{u}$, $\bar{r}$, den Formeln (20.) entsprechend, zu

$$(21.)\qquad \left|\begin{array}{l} \bar{g}_2 = 12(\bar{s}_0^2 - s_0\bar{k}), \\ \bar{g}_3 = 12\,\bar{s}_0\,s_0\,k - 8\,\bar{s}_0^3 - 4\bar{k}^2 k. \end{array}\right.$$

Setzt man daher

$$\bar{s} - \bar{s}_0 = -\bar{k}\,\bar{\mathfrak{U}},$$

so ist auch $\bar{s} = \bar{\wp}\,\bar{u} = \wp(u; \bar{g}_2, \bar{g}_3)$ eine *Weierstraß*sche Pefunktion. Aus den Gleichungen (21.) wird wie oben gefolgert, daß es einen der Begrenzung des aus Halbperioden gebildeten Rechtecks $(0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ bezw. $(0, \omega_2, 2\bar{\omega}_3, \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)$ angehörigen Wert $\bar{w}_0$ des Arguments der Funktion $\bar{\wp}$ von der Beschaffenheit gibt, daß er eine Nullstelle der Funktion $\bar{\mathfrak{U}}$ darstellt und gleichzeitig den Gleichungen

$$\wp(\bar{w}_0; \bar{g}_2, \bar{g}_3) = \bar{s}_0,$$
$$\wp'(\bar{w}_0; g_2, \bar{g}_3) = -2\bar{k}\sqrt{k}$$

Genüge leistet.

Weil die Funktionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$ zu einander reziprok sind, so ergibt sich, daß der durch die geodätische Abbildung vermittelte Zusammenhang der beiden Flächen $(\mathfrak{F})$ und $(\bar{\mathfrak{F}})$ analytisch durch die Formeln

$$(\wp(u; g_2, g_3) - s_0)(\wp(\bar{u}; \bar{g}_2, g_3) - \bar{s}_0) = k\bar{k},$$
$$(\wp(iv; g_2, g_3) - s_0)(\wp(i\bar{v}; \bar{g}_2, \bar{g}_3) - \bar{s}_0) = k\bar{k}$$

ausgedrückt wird. Zwischen den Invarianten der beiden Pefunktionen und den Krümmungsmaßen der beiden Flächen bestehen dabei vermöge der Formeln (20.) und (21.) gewisse Relationen, auf welche zunächst noch näher einzugehen ist.

Denkt man sich die Konstanten k und $\bar{k}$ gegeben, so sind zufolge der Gleichungen (20.) und (21.) die vier Invarianten $g_2, g_3, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ Funktionen der beiden Parameter $s_0, \bar{s}_0$. Es müssen also zwischen den vier Größen $g_2, g_3, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ zwei von einander unabhängige Relationen bestehen. Um dieselben aufstellen zu können, berechne man zuerst die absolute Invariante

$$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27\, g_3^2).$$

Man erhält aus den Gleichungen (20.)

$$G = 27\, k^2 \cdot (3\, s_0^2 \bar{s}_0^2 - 4\, s_0^3 \bar{k} - 4\, \bar{s}_0^3 k - k^2 \bar{k}^2 + 6\, s_0 \bar{s}_0 k \bar{k}).$$

Der in den Klammern stehende Ausdruck ergibt sich aber durch Addition folgender Aggregate:

$$\begin{array}{l} 3\, s_0^2 \bar{s}_0^2 - 3\, s_0^3 \bar{k} - 3\, \bar{s}_0^3 k + \quad * \quad + 3\, s_0 \bar{s}_0 k \bar{k} = \frac{3}{12^2}\, g_2 \bar{g}_2, \\ \quad * \quad - \quad s_0^3 \bar{k} + \quad * \quad - \frac{1}{2} k^2 \bar{k}^2 + \frac{3}{2} s_0 \bar{s}_0 k \bar{k} = \frac{1}{8}\, g_3 \bar{k}, \\ \quad * \quad + \quad * \quad - \quad \bar{s}_0^3 k - \frac{1}{2} k^2 \bar{k}^2 + \frac{3}{2} s_0 \bar{s}_0 k \bar{k} = \frac{1}{8}\, \bar{g}_3 k, \end{array}$$

so daß man

(22.) $$G = \frac{27}{8} k^2 (g_3 \bar{k} + \frac{1}{6} g_2 \bar{g}_2 + \bar{g}_3 k)$$

erhält. Da der in der Klammer stehende Ausdruck sich nicht ändert, wenn s_0 mit $\bar{s}_0$, k mit $\bar{k}$, g_2 mit $\bar{g}_2$, g_3 mit $\bar{g}_3$ vertauscht werden, d. h. wenn man von der Fläche $(\mathfrak{F})$ zur geodätischen Bildfläche $(\bar{\mathfrak{F}})$ übergeht, so folgt für die absolute Invariante $\bar{G} = \frac{1}{16}(\bar{g}_2^3 - 27\, \bar{g}_3^2)$ der Wert

(23.) $$\bar{G} = \frac{27}{8} \bar{k}^2 (g_3 \bar{k} + \frac{1}{6} g_2 \bar{g}_2 + \bar{g}_3 k)$$

und mithin die Relation

(24.) $$G : \bar{G} = k^2 : \bar{k}^2.$$

Wenn daher zwei Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf einander geodätisch abgebildet werden, so kann stets durch eine passende Wahl des Maßstabs bewirkt werden, daß die absoluten Invarianten der die Abbildung vermittelnden Pefunktionen sich verhalten wie die Quadrate der Krümmungsmaße.

Es soll nun nachgewiesen werden, daß die vorstehenden, zwischen den Pefunktionen und ihren Invarianten bestehenden Relationen inhaltlich übereinstimmen mit folgenden Festsetzungen.

1. *Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen* $s = \wp w$ *und* $\bar{s} = \bar{\wp}\,\bar{w}$ *reelle Invarianten besitzen, soll jedem auf der Begrenzung eines zum Argument* w *gehörigen Halbperioden-Parallelogramms gelegenen Punkte ein Punkt der Begrenzung eines zum Argument* $\bar{w}$ *gehörigen Halbperioden-Parallelogramms in der Weise entsprechen, daß die zugehörigen Funktionswerte eindeutig und eindeutig umkehrbar auf einander bezogen sind.*

Hieraus folgt zunächst, daß die Periodenparallelogramme Rechtecke sind, und daß jedem Punkte und nur solchem, welcher den Begrenzungen der aus den Halbperioden gebildeten Rechtecke angehört, ein reeller Wert der Pefunktion entspricht. Ferner ergibt sich hieraus für *reelle* **Werte von** $s, \bar{s}$ **das Bestehen einer Relation von der Form**

$$\bar{s} = \frac{as+b}{cs+d}$$

mit reellen Koeffizienten.

2. *Dem Werte* $w = 0$, *für welchen die Funktion* $s = \wp w$ *unendlich groß wird, soll ein von Null verschiedener Wert* $\bar{w} = \bar{w}_0$ *entsprechen, für den die Funktion* $\bar{\wp}\bar{w}$ *einen endlichen Wert* $\bar{s}_0$ *annimmt; dem Werte* $\bar{w} = 0$ *soll der von Null verschiedene Wert* $w = w_0$ *entsprechen, für den* $\wp w_0 = s_0$ *wird.*

Hieraus folgt, da die Punkte $\omega_0, \bar{\omega}_0$ **auf den Begrenzungen der Halbperioden-Rechtecke gelegen sind, daß** $s_0, \bar{s}_0$ **reelle Werte besitzen und die obige Relation also die Form**

$$(s - s_0)(\bar{s} - \bar{s}_0) = C \tag{25.}$$

annimmt, unter C **eine reelle Konstante verstanden.**

3. *Die Gesamtheit der übrigen drei Ecken (die Ecke* 0 *ausgeschlossen) des einen Halbperioden-Rechtecks soll der Gesamtheit der übrigen drei Ecken des anderen entsprechen.*

Es seien $2\omega_1, 2\omega_3$ **bezw.** $2\bar{\omega}_1, 2\bar{\omega}_3$ **zwei primitive Periodenpaare der Argumente** w **bezw.** $\bar{w}$**. Der Einfachheit wegen werde angenommen, daß**

ω_1, $\bar{\omega}_1$ reelle, ω_3, $\bar{\omega}_3$ rein imaginäre Werte haben, und bemerkt, daß sich der andere Fall, wo ω_1, ω_3 und $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_3$ konjugiert-komplexe Zahlen sind, in entsprechender Weise behandeln läßt. Dann sind die Werte $w = \omega_1$, $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$, ω_3 bzw. $\bar{w} = \bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_3$ die in Rede stehenden Ecken der Halbperioden-Rechtecke. Ist $\wp\omega_\lambda = e_\lambda$, $\wp\bar{\omega}_\lambda = \bar{e}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$, so bestehen demnach drei Gleichungen von der Form

$$(e_\lambda - s_0)(\bar{e}_\mu - \bar{s}_0) = C. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Setzt man

$$(e_1 - s_0)(e_2 - s_0)(e_3 - s_0) = -C \cdot k,$$

$$(\bar{e}_1 - \bar{s}_0)(\bar{e}_2 - \bar{s}_0)(\bar{e}_3 - \bar{s}_0) = -C \cdot \bar{k},$$

so folgt

$$C = k\bar{k}.$$

Erfüllt man ferner durch diese Gleichungen, denen die Größen e_λ, $\bar{e}_\lambda$ genügen, die Relationen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0,$$

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2, \qquad \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_1 = -\frac{1}{4} \bar{g}_2,$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3, \qquad \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 = \frac{1}{4} \bar{g}_3,$$

so ergeben sich nach einer kurzen Umformung für die Invarianten der Pefunktionen die durch die Gleichungen (20.) und (21.) definierten Werte.

Man kann nun weiter stets durch eine geeignete Wahl des Maßstabs der beiden Ebenen w, $\bar{w}$ bewirken, daß die Konstanten k, $\bar{k}$ gegebene Werte erhalten, also auch den Krümmungsmaßen der Flächen, welche auf einander geodätisch bezogen sind, gleich werden. Denn ersetzt man w durch $\frac{w}{m}$, $\bar{w}$ durch $\frac{\bar{w}}{\bar{m}}$, unter m, $\bar{m}$ passend gewählte, reelle oder rein imaginäre Konstanten verstanden, so ergibt sich auf Grund der Formel

$$\wp(w; g_2, g_3) = \frac{1}{n^2} \wp\left(\frac{w}{n}; n^4 g_2, n^6 g_3\right)$$

folgende Reihe von Substitutionen

$$s \| s m^2, \quad s_0 \| s_0 m^2, \quad g_2 \| g_2 m^4, \quad g_3 \| g_3 m^6,$$

$$\bar{s} \| \bar{s} \bar{m}^2, \quad \bar{s}_0 \| \bar{s}_0 \bar{m}^2, \quad \bar{g}_2 \| \bar{g}_2 \bar{m}^4, \quad \bar{g}_3 \| \bar{g}_3 \bar{m}^6,$$

$$C \| m^2 \bar{m}^2 C \qquad k \| \frac{m^4}{\bar{m}^2} k, \quad \bar{k} \| \frac{\bar{m}^4}{m^2} \bar{k}.$$

Man kann demnach stets durch geeignete Wahl der Konstanten $m, \bar{m}$ herbeiführen, daß $k, \bar{k}$ vorgeschriebene Werte annehmen.

Es sei $w = u + iv$, $\bar{w} = \bar{u} + i\bar{v}$: für die auf der Begrenzung der Halbperioden-Rechtecke liegenden Punkte nehmen $w, \bar{w}$ folgende Werte an:

$$\begin{array}{lll} w = u, & w = u + \omega_3, & 0 \leqq u \leqq \omega_1, \\ w = iv, & w = \omega_1 + iv, & 0 \leqq iv \leqq \omega_3, \\ \bar{w} = \bar{u}, & \bar{w} = \bar{u} + \bar{\omega}_3, & 0 \leqq \bar{u} \leqq \bar{\omega}_1, \\ \bar{w} = i\bar{v}, & \bar{w} = \bar{\omega}_1 + i\bar{v}, & 0 \leqq i\bar{v} \leqq \bar{\omega}_3. \end{array}$$

Im allgemeinen entsprechen daher nach der Formel (25.) reellen bzw. rein imaginären Werten von w *nicht* reelle bzw. rein imaginäre Werte von $\bar{w}$, wohl aber solche, welche sich von diesen nur um additive Konstanten oder dadurch unterscheiden, daß u mit iv oder $\bar{u}$ mit $i\bar{v}$ vertauscht ist, d. h. der Maßstab im Verhältnis $1:i$ geändert ist. Diese Möglichkeiten sind aber ausdrücklich vorgesehen.

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich nunmehr in folgender Form zusammenfassen.

Wenn zwei reelle Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf einander geodätisch abgebildet werden, so entsprechen — abgesehen von dem Falle, in welchem die Linienelemente auf die den Rotationsflächen zukommende Form gebracht sind — einander zwei solche Orthogonalsysteme von Kurven, welche eine konforme Abbildung eines passend begrenzten Stückes jeder Fläche auf je ein Rechteck bewerkstelligen. Diese konforme Abbildung wird nach den Ergebnissen von Herrn H. A. Schwarz durch je eine ℘funktion mit reellen Invarianten vermittelt. Die Punkte der Begrenzungen der beiden Rechtecke sind in der Weise auf einander bezogen, daß den zugehörigen Werten der einen ℘funktion die der anderen eindeutig und eindeutig umkehrbar entsprechen. Die drei Ecken des einen Rechtecks, für welche die eine ℘funktion endliche Werte besitzt, entsprechen den drei Ecken des anderen von derselben Beschaffenheit; die vierte Ecke, für welche die Funktion unendlich groß wird, entspricht nicht der vierten Ecke des anderen Rechtecks. —

Aus den im vorstehenden entwickelten allgemeinen Formeln ergeben sich nun eine Reihe spezieller Folgerungen dadurch, daß die Invarianten $g_2, g_3, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ bestimmten Bedingungen unterworfen werden. Solange hierbei

die Gleichungen (22.) und (23.) für beliebige Werte von k, $\bar{k}$ gültig bleiben, wird durch diese Bedingungen die Allgemeinheit der Fläche nicht eingeschränkt.

Man kann g_2, g_3 so wählen, daß die absolute Invariante G verschwindet. Dann verschwindet zufolge der Gleichung (24.) auch $\bar{G}$, und es besteht die Formel

$$g_3 \bar{k} + \frac{1}{6} g_2 \bar{g}_2 + \bar{g}_3 k = 0.$$

Bezeichnet man daher mit ν und $\bar{\nu}$ zwei reelle Zahlen, welche durch die Beziehung

(26.) $$2\nu^3 + 3\nu^2 \bar{\nu}^2 + 2\bar{\nu}^3 = 0$$

verknüpft sind, so erfüllen die Werte

$$g_2 = 3\nu^2 k \sqrt[3]{k \bar{k}^2}, \quad g_3 = \nu^3 k^2 \bar{k},$$

$$\bar{g}_2 = 3\bar{\nu}^2 \bar{k} \sqrt[3]{\bar{k} k^2}, \quad \bar{g}_3 = \bar{\nu}^3 \bar{k}^2 k$$

die gemachten Voraussetzungen.

In dem betrachteten Falle, in welchem G verschwindet, läßt die $\wp$funktion sich bekanntlich auf trigonometrische Funktionen zurückführen, und man erhält das Quadrat des Linienelements in der Form

$$dl^2 = -\frac{a^2}{k}\left(\frac{1}{\sin^2(au)} - \frac{1}{\sin^2(aiv)}\right)(du^2 + dv^2),$$

welche der konformen Abbildung auf einen Streifen entspricht.

In dem weiteren Grenzfall, in welchem g_2 und g_3 identisch gleich Null sind, folgt aus den vorstehenden Formeln, daß auch $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$ gleich Null sein müssen. Ferner wird $\wp u = 1 : u^2$; daher lautet das Quadrat des Linienelements der Fläche ($\mathfrak{F}$)

$$dl^2 = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)(du^2 + dv^2).$$

Die Konstante s_0 erhält den Wert $\sqrt[3]{k^2 \bar{k}}$. Zur Fläche ($\bar{\mathfrak{F}}$) geht man daher zufolge der Gleichung

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{w_0^2}\right)\left(\frac{1}{\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{w}_0^2}\right) = k \bar{k},$$

oder da

$$w_0 = 1 : \sqrt[3]{k\sqrt{k}}, \quad \bar{w}_0 = 1 : \sqrt[3]{\bar{k}\sqrt{\bar{k}}},$$

zufolge der Gleichung

$$(27.)\qquad \frac{u^2}{w_0^2} + \frac{\bar{u}^2}{\bar{w}_0^2} = 1$$

und der Gleichung

$$(28.)\qquad \frac{v^2}{w_0^2} + \frac{\bar{v}^2}{\bar{w}_0^2} = -1$$

über. Unter der Voraussetzung, daß die Variablen $\bar{u}, \bar{v}$ diesen Bedingungen entsprechend gewählt werden, stellt die Formel

$$d\bar{l}^2 = -\frac{1}{\bar{k}}\left(\frac{1}{\bar{u}^2} + \frac{1}{\bar{v}^2}\right)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

das Quadrat des Linienelements einer Fläche ($\bar{\mathfrak{F}}$) dar, welche ein geodätisches Bild der Fläche ($\mathfrak{F}$) ist.

Die Gleichungen (27.) und (28.) sind von selbst erfüllt, wenn man

$$u = w_0 \cos\varphi, \quad iv = w_0 \sin\psi,$$
$$\bar{u} = \bar{w}_0 \sin\varphi, \quad i\bar{v} = \bar{w}_0 \cos\psi$$

setzt; dann wird

$$dl^2 = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\psi}\right)(\sin^2\varphi\, d\varphi^2 - \cos^2\psi\, d\psi^2),$$

$$d\bar{l}^2 = -\frac{1}{\bar{k}}\left(\frac{1}{\cos^2\psi} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right)(\sin^2\psi\, d\psi^2 - \cos^2\varphi\, d\varphi^2).$$

Die vorstehenden Gleichungen, deren rechte Seiten durch Vertauschung von k mit $\bar{k}$, φ mit ψ aus einander hervorgehen, stellen daher stets die Linienelemente zweier geodätisch auf einander abgebildeten Flächen von konstanter Krümmung dar.

Beiläufig sei erwähnt, daß sich bei Anwendung der Variablen φ, ψ die geodätischen Linien beider Flächen bezüglich durch die Gleichungen

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\psi)^2 + C(\cos^2\varphi + \sin^2\psi) + C' = 0,$$
$$(\cos^2\psi - \sin^2\varphi)^2 + \bar{C}(\cos^2\psi + \sin^2\varphi) + \bar{C}' = 0$$

ermitteln lassen. Diese beiden Gleichungen gehen, wenn die willkürlichen

Konstanten C', C'', $\bar{C}'$, $\bar{C}''$ durch die Relationen

$$C' + \bar{C}' = 0, \qquad C'' - \bar{C}'' = -2C'$$

verbunden werden, aus einander naturgemäß ebenfalls durch Vertauschung von φ mit ψ hervor.

III.

Ich ergänze jetzt die vorstehenden Untersuchungen hinsichtlich des bisher ausgeschlossenen Falles, in welchem die Linienelemente der betrachteten Flächen konstanten Krümmungsmaßes von vornherein auf diejenige Form gebracht sind, welche sie als Biegungen von Umdrehungsflächen kennzeichnet. Dies ist bekanntlich stets möglich. Jedes der beiden, nach dem *Tissot*schen Satz einander entsprechenden Orthogonalsysteme ist dann aus einer Schar geodätischer Linien und der Schar ihrer orthogonalen Trajektorien zusammengesetzt. Ich werde nun zeigen, daß diese Art der Abbildung, welche aus einem nachher ersichtlichen Grunde eine *affin-geodätische* Abbildung genannt werden soll, eine besondere Rolle spielt.

Für den vorliegenden Fall genügt es anzunehmen, daß die Funktion V beständig konstant gleich A, $V' = 0$ sei. Die Untersuchung hat alsdann wieder bei der Formel (6.) zu beginnen; diese läßt sich unter der angegebenen Voraussetzung auf die Form

$$4kU' = -\frac{d}{du}\left(\frac{U'}{U-A}\right)^2$$

bringen, welche die Integration durch Ausführung einer Quadratur ermöglicht. So erhält man

$$U = A - \frac{a^2}{k\sin^2(au)}, \tag{29.}$$

unter a die eine der Integrationskonstanten verstanden, während die andere, weil sie zu u additiv hinzutritt, unterdrückt worden ist. Die Konstante a wird zunächst als von Null verschieden vorausgesetzt. Das Quadrat des Linienelements ergibt sich dann in der bekannten Form

$$dl^2 = \frac{-a^2}{k\sin^2(au)}(du^2 + dv^2).$$

Der Übergang zur geodätischen Bildfläche erfolgt durch die Formeln (4.), welche die folgende Gestalt annehmen:

$$d\bar u = -i\,\frac{d\cos(au)}{a\sqrt{A\sin^2(au) - \frac{a^2}{k}}}, \quad d\bar v = \frac{i\,dv}{\sqrt{\bar A}},$$

wenn $\bar A = A + h$ gesetzt wird. Man kann auch hier die Quadratur in geschlossener Form ausführen und gelangt zu dem Ergebnis

$$\cos(a\bar u\sqrt{-\bar A}) = \cos(au)\cdot\sqrt{\frac{\bar A}{\bar A - \frac{a^2}{\bar k}}},$$

$$\bar v = \frac{v}{\sqrt{-\bar A}},$$

abgesehen von den zu u und v additiv hinzutretenden Integrationskonstanten. Definiert man nun zwei Konstanten $\bar a$ und $\bar k$ durch die Gleichungen

$$\bar a^2 + \bar A a^2 = 0,$$

$$a^6\bar k + a^4\bar a^4 + \bar a^6 k = 0,$$

so erhält man die Formeln

$$(30.)\qquad \begin{cases} \frac{k}{a^6}\cos^2(au) + \frac{\bar k}{\bar a^6}\cos^2(\bar a\bar u) = 0, \\ av = \bar a\bar v, \end{cases}$$

und demnach das Quadrat des Linienelements der geodätischen Bildfläche

$$d\bar l^2 = \frac{-\bar a^2}{\bar k\sin^2(\bar a\bar u)}(d\bar u^2 + d\bar v^2),$$

woraus zu erkennen ist, daß $\bar k$ das Krümmungsmaß dieser Fläche bedeutet. Setzt man endlich

$$a^2 = \frac{3}{2}\nu\sqrt[3]{k^2\bar k}, \quad \bar a^2 = \frac{3}{2}\bar\nu\sqrt[3]{k\bar k^2},$$

so sind ν und $\bar\nu$ zwei reelle Zahlen, welche durch die schon früher vorgekommene Relation (26.)

$$2\nu^3 + 3\nu^2\bar\nu^2 + 2\bar\nu^3 = 0$$

verknüpft sind. Es ist daher stets möglich, zwei Flächen von konstantem Krümmungsmaß auf einander *affin-geodätisch* abzubilden.

Man führe nun je zwei konjugiert-komplexe Veränderliche α, α_1 und $\bar\alpha, \bar\alpha_1$ vermöge der Formeln

$$\alpha = e^{ai(u+iv)}, \quad \alpha_1 = e^{-ai(u-iv)},$$
$$\bar\alpha = e^{\bar a i(\bar u + i\bar v)}, \quad \bar\alpha_1 = e^{-\bar a i(\bar u - i\bar v)}$$

ein, wodurch die Quadrate der Linienelemente auf die Formen

$$dl^2 = \frac{4}{k}\frac{d\alpha\, d\alpha_1}{(\alpha-\alpha_1)^2},$$
$$d\bar l^2 = \frac{4}{\bar k}\frac{d\bar\alpha\, d\bar\alpha_1}{(\bar\alpha-\bar\alpha_1)^2}$$

reduziert werden. Die Relationen (30.), welche die geodätische Abbildung vermitteln, nehmen dann die einfachste Gestalt an, nämlich

(31.) $$\begin{cases} \bar\alpha\,\bar\alpha_1 = \alpha\,\alpha_1 \\ \bar\alpha + \bar\alpha_1 = \lambda(\alpha+\alpha_1), \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{\bar a^3}{a^3}\sqrt{\frac{k}{\bar k}}$$

gesetzt ist. Diese Transformation läßt die Invarianz der durch die Gleichung

(32.) $$\alpha\alpha_1 + p(\alpha+\alpha_1) + q = 0$$

gegebenen geodätischen Linien unmittelbar erkennen.

In dem Grenzfall, in welchem die in der Formel (29.) auftretende Integrationskonstante a verschwindet, ergibt sich

(33.) $$dl^2 = -\frac{1}{ku^2}(du^2 + dv^2).$$

Dieser Grenzfall ist ohne weiteres auf den vorigen zurückzuführen.

Um die affin-geodätische Abbildung näher zu charakterisieren, betrachte man die *Beltrami*sche Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf eine Ebene ($\mathfrak{P}$), bei welcher den geodätischen Linien die Geraden der Ebene entsprechen. Sind X, Y die kartesischen Koordinaten dieser Ebene ($\mathfrak{P}$), und $\alpha = x + iy$, $\alpha_1 = x - iy$ die vorher erwähnten konjugiert-komplexen

Variablen, für welche das Quadrat des Linienelements die Form

$$dl^2 = \frac{4}{k}\frac{d\alpha\, d\alpha_1}{(\alpha-\alpha_1)^2} = -\frac{1}{ky^2}(dx^2+dy^2)$$

annimmt, so genügt es, bei beliebigem ϱ

$$(34.)\qquad \alpha\alpha_1 = x^2+y^2 = \frac{\varrho - X}{\varrho + X},\quad \frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) = x = \frac{Y}{\varrho+X}$$

zu setzen, um eine *Beltrami*sche Abbildung der Fläche ($\mathfrak{F}$) auf das Innere des Grenzkreises

$$X^2+Y^2=\varrho^2$$

zu erhalten. Denn diese Formeln führen die allgemeine Gleichung (32.) der geodätischen Linien in die Form der Geraden

$$AX+BY+C=0$$

über; das Quadrat des Linienelements nimmt aber die *Beltrami*sche Form

$$dl^2 = -\frac{1}{k}\frac{(\varrho^2-Y^2)dX^2+2XY\,dX\,dY+(\varrho^2-X^2)dY^2}{(X^2+Y^2-\varrho^2)^2}$$

an.

Denkt man sich nun für eine zweite Fläche ($\bar{\mathfrak{F}}$) eine ebensolche *Beltrami*sche Abbildung auf eine zweite Ebene ($\bar{\mathfrak{B}}$) ausgeführt und beide Flächen in *allgemeinster* Weise auf einander geodätisch bezogen, so werden die Ebenen ($\mathfrak{B}$) und ($\bar{\mathfrak{B}}$) auf einander *projektivisch* bezogen, da die Geraden einander entsprechen.

Wenn aber zwei Flächen ($\mathfrak{F}$) und ($\bar{\mathfrak{F}}$) konstanten Krümmungsmaßes affin-geodätisch auf einander abgebildet sind, d. h. so, daß ein orthogonal-geodätisches Koordinatensystem sich selbst entspricht, so sind die beiden Beltramischen Ebenen ($\mathfrak{B}$) und ($\bar{\mathfrak{B}}$) zu einander affin.

Denn setzt man für die *Beltrami*sche Abbildung der Fläche ($\bar{\mathfrak{F}}$) entsprechend den Formeln (34.)

$$\bar{\alpha}\bar{\alpha}_1 = \bar{x}^2+\bar{y}^2 = \frac{\bar{\varrho}-\bar{X}}{\bar{\varrho}+\bar{X}},\quad \frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_1) = \bar{x} = \frac{\bar{Y}}{\bar{\varrho}+\bar{X}},$$

unter $\bar{X}$, $\bar{Y}$ die kartesischen Koordinaten der Ebene ($\bar{\mathfrak{B}}$) verstehend, so bestehen auf Grund der Relationen (31.), wenn man

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = \mu,\quad \lambda\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = \nu$$

einführt, zwischen den Koordinaten der Ebenen die Gleichungen

$$\overline{X} = \mu X, \quad \overline{Y} = \nu Y,$$

welche die affine Verwandtschaft ausdrücken.

Es ist leicht einzusehen, daß sich der eben ausgesprochene Satz umkehren läßt:

Wenn die Ebenen $(\mathfrak{P})$ *und* $(\overline{\mathfrak{P}})$ *affin sind, so ist das sich selbst entsprechende Orthogonalsystem der beiden geodätischen Bildflächen* $(\mathfrak{F})$ *und* $(\overline{\mathfrak{F}})$ *ein orthogonal-geodätisches System.*

Die Sonderstellung, welche die affin-geodätische Abbildung zweier Flächen von konstantem Krümmungsmaß einnimmt, tritt besonders hervor, wenn außer den geodätischen Linien noch die *geodätischen Kreise* in den Bereich der Untersuchungen gezogen werden. Unter geodätischen Kreisen sind dabei in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise von den Herren *Darboux* und *Bianchi* die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung verstanden. Der reziproke Wert der geodätischen Krümmung soll der Radius des geodätischen Kreises genannt werden.

Die Geometrie der geodätischen Kreise wird zweckmäßig untersucht mit Hilfe der konformen Abbildung auf die Ebene der komplexen Variablen $\alpha = x + iy$, $\alpha_1 = x - iy$. Die Mittelpunkte der zweifach unendlichen Schar von Kreisen $(\mathfrak{K}_0)$

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2,$$

welche den geodätischen Linien entsprechen, liegen sämtlich auf der Achse des Reellen. Jeder andere Kreis der Ebene

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \tag{35.}$$

welcher der eben betrachteten Schar nicht angehört, entspricht einer Kurve konstanter und von Null verschiedener geodätischer Krümmung

$$g = \frac{b}{r} \sqrt{-k} = \cos \omega \cdot \sqrt{-k}, \tag{36.}$$

deren Wert nur von dem Winkel ω abhängt, unter welchem der Kreis die reelle Achse schneidet. Jeder zweifach unendlichen Schar von Kurven *gegebener* konstanter geodätischer Krümmung g entspricht dann eine zweifach unendliche Schar von Kreisen $(\mathfrak{K}_g)$

$$(x - a)^2 + \left(y - \frac{gr}{\sqrt{-k}}\right)^2 = r^2.$$

Bei der *Beltrami*schen Abbildung auf eine Ebene ($\mathfrak{B}$) mit den kartesischen Koordinaten X, Y entspricht dem Kreise ($\mathfrak{K}_g$) der Kegelschnitt

$$((a^2 - r^2 - 1)X - 2aY + (a^2 - r^2 + 1) + r^2 \cos^2\omega (X + \varrho))^2$$
$$= 4r^2 \cos^2\omega (\varrho^2 - X^2 - Y^2),$$

welcher, wie aus der Gleichung ersichtlich ist, den Grenzkreis $X^2 + Y^2 = \varrho^2$ berührt, und zwar in den Punkten, in denen die Gerade

$$r^2 \mathfrak{g} \equiv (a^2 - r^2 - 1)X - 2aY + (a^2 - r^2 + 1) + r^2 \cos^2\omega (X + \varrho) = 0$$

den Grenzkreis schneidet. Diese Tatsache ist bekannt.*) Die Gleichung des Kegelschnitts läßt sich nun auch in der Form schreiben:

$$((a^2 - r^2 - 1)X - 2aY + (a^2 - r^2 + 1) - r^2 \cos^2\omega (X + \varrho))^2$$
$$= 4r^2 \cos^2\omega ((a + r)(X + \varrho) - Y)(Y - (a - r)(X + \varrho)),$$

welche aussagt, daß er die durch den Punkt $X = -\varrho$, $Y = 0$ hindurchgehenden Geraden

$$Y = (a + r)(X + \varrho) \qquad \text{und} \qquad Y = (a - r)(X + \varrho)$$

zu Tangenten hat. Setzt man

$$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{l}_1 + \cos^2\omega\, \mathfrak{l}_2, \quad \mathfrak{h} \equiv \mathfrak{l}_1 - \cos^2\omega\, \mathfrak{l}_2,$$

so sind $\mathfrak{l}_1 = 0$ und $\mathfrak{l}_2 \equiv X + \varrho = 0$ die Geraden, welche durch die Schnittpunkte der Tangenten mit dem Grenzkreis hindurchgehen, und $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ die Berührungssehnen. Diese vier Geraden bilden daher, wie auch in der Kegelschnittlehre gezeigt wird, ein harmonisches Büschel mit dem Doppelverhältnis

$$(\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{g} \mathfrak{h}) = -1.$$

Wenn ω konstant ist, d. h. wenn die geodätischen Kreise der Fläche, deren Bilder die in Rede stehenden Kegelschnitte sind, die nämliche geodätische Krümmung besitzen, so besitzt auch das Büschel ein konstantes Teilverhältnis in dem Sinne, daß aus der Geraden $X = 0$ durch die Winkel $\widehat{\mathfrak{g}\mathfrak{l}_1}$ und $\widehat{\mathfrak{h}\mathfrak{l}_1}$ gleiche Stücke ausgeschnitten werden, deren Länge gleich $\cos^2\omega$ ist.

*) Vgl. z. B. *Darboux*, a. a. O. III, S. 417.

Man denke sich nun die in Rede stehende Fläche konstanten Krümmungsmaßes auf eine andere Fläche geodätisch abgebildet. Hierbei bleibt der Definition der geodätischen Abbildung gemäß die zweifach unendliche Kreisschar $(\mathfrak{K}_0)$ invariant. Man kann sich dann die Frage vorlegen, ob eine solche geodätische Abbildung der beiden Flächen auf einander möglich ist, bei welcher — außer der Kreisschar $(\mathfrak{K}_0)$ — noch eine andere Kreisschar $(\mathfrak{K}_g)$ $(g \lesseqgtr 0)$ invariant bleibt.

Bei der Beantwortung dieser Frage sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Entweder ist die Kreisschar $(\mathfrak{K}_g)$ *zweifach* unendlich; dann gibt es *keine* geodätische Abbildung, welche diese Schar invariant läßt.

Oder die Kreisschar $(\mathfrak{K}_g)$ ist *einfach* unendlich; dann gibt es in der Tat für jeden Wert von g eine *affin*-geodätische Abbildung, welche die Schar $(\mathfrak{K}_g)$ invariant läßt.

Zum Beweise des ersten Satzes wird zunächst diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt, welcher die zweifach unendliche Schar $(\mathfrak{K}_g)$ genügt, und sodann gezeigt, daß unter der Annahme ihrer Invarianz gegen irgend eine geodätische Abbildung diese gleichzeitig eine konforme Abbildung, also eine Abwickelbarkeit beider Flächen, nach sich zieht.

Aus der Gleichung (35.) ergibt sich durch Differentiation

$$(37.)\qquad (x-a)\,dx + \Big(y - \frac{gr}{\sqrt{-k}}\Big)dy = 0,$$

$$(38.)\qquad (x-a)\,d^2x + \Big(y - \frac{gr}{\sqrt{-k}}\Big)d^2y = dx^2 + dy^2.$$

Aus den Gleichungen (35.), (37.), (38.) hat man nun die Konstanten a und r zu eliminieren und erhält auf diese Weise die Differentialgleichung

$$\frac{g}{\sqrt{-k}}(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = y\,(dy\,d^2x - dx\,d^2y) - dx\,(dx^2+dy^2).$$

Dies ist die Differentialgleichung, welcher die Kreisschar (K_g) genügt. Da die linke Seite für $g=0$ verschwindet, so ergibt die rechte Seite, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung der geodätischen Linien. In entsprechender Weise würde für eine zweite Fläche konstanten Krümmungsmaßes die Differentialgleichung

$$\frac{g}{\sqrt{-k}}(d\bar{x}^2+d\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}} = \bar{y}\,(d\bar{y}\,d^2\bar{x} - d\bar{x}\,d^2\bar{y}) - d\bar{x}\,(d\bar{x}^2+d\bar{y}^2)$$

einer zweifach unendlichen Kreisschar ($\bar{\mathfrak{K}}_g$) gefunden werden, deren rechte Seite, gleich Null gesetzt, mit der Differentialgleichung der geodätischen Linien dieser Fläche übereinstimmt.

Wenn nun die beiden betrachteten Flächen auf einander geodätisch abgebildet werden können, so existiert eine Transformation $\bar{x} = \varphi(x, y)$, $\bar{y} = \psi(x, y)$ derart, daß die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen einem nicht verschwindenden Faktor $\lambda(x, y)$ proportional werden. Demnach besteht, da g nicht gleich Null ist, die Gleichung

$$\sqrt{-\bar{k}}\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \lambda \cdot \sqrt{-k}\,(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nun aber diese Gleichung in dem vorliegenden Falle, wo es sich um das Entsprechen zweier *zweifach* unendlichen Kurvenscharen handelt, für alle den Transformationsgleichungen genügenden Werte von x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ identisch bestehen soll, so folgt

$$\bar{k}^{\frac{1}{3}}\,dl = \lambda^{\frac{2}{3}}\,k^{\frac{1}{3}}\,d\bar{l},$$

das heißt, die beiden Flächen können auf einander konform abgebildet werden, sind also auf einander abwickelbar. Diese Möglichkeit war aber von der Betrachtung ausgeschlossen.

Damit ist die Behauptung erwiesen, daß bei der geodätischen Abbildung außer der Kreisschar ($\mathfrak{K}_0$) keine zweifach unendliche Kreisschar ($\mathfrak{K}_g$) einer ebensolchen ($\bar{\mathfrak{K}}_g$) entspricht. Man kann ferner die Beweisführung leicht auf den allgemeineren Fall ausdehnen, wo die geodätischen Krümmungen der beiden Kreisscharen verschieden sind; man würde dann zu einer Gleichung gelangen, welche sich von der vorstehenden nur dadurch unterscheidet, daß auf der linken Seite der Faktor $g^{\frac{2}{3}}$, auf der rechten Seite $\bar{g}^{\frac{2}{3}}$ hinzutritt.

Somit ergibt sich der folgende Satz:

Bei der geodätischen Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmaßes ist die zweifach unendliche Schar der geodätischen Linien die einzige aller zweifach unendlichen Scharen von geodätischen Kreisen mit demselben Radius, welche eine Schar ebensolcher Kurven zum Bilde hat.

Nun ist der zweite Fall zu untersuchen, in welchem es sich um das Entsprechen zweier *einfach* unendlichen Scharen von geodätischen Kreisen mit demselben Radius handelt. Es ist zunächst nachzuweisen, daß bei der

affin-geodätischen Abbildung ein derartiges Entsprechen wirklich möglich ist. Hierzu soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen irgend ein Kreis $(\mathfrak{K})$ der Ebene der komplexen Variablen $\alpha = x + iy$, $\alpha_1 = x - iy$ vermöge der affin-geodätischen Abbildung der Fläche in einen Kreis $(\bar{\mathfrak{K}})$ der Ebene der komplexen Variablen $\bar\alpha = \bar x + i\bar y$, $\bar\alpha_1 = \bar x - i\bar y$ übergeht. Sei

$$\alpha\alpha_1 + p(\alpha + \alpha_1) + q(\alpha - \alpha_1) + r = 0$$

die Gleichung des Kreises $(\mathfrak{K})$; vermöge der affin-geodätischen Abbildung (vgl. Gleichung (31.))

$$\bar\alpha\bar\alpha_1 = \alpha\alpha_1, \qquad \bar\alpha + \bar\alpha_1 = \lambda(\alpha + \alpha_1)$$

geht er im allgemeinen in eine Kurve vierter Ordnung über, nämlich

$$(39.) \qquad \left(\bar\alpha\bar\alpha_1 + \frac{p}{\lambda}(\bar\alpha + \bar\alpha_1) + r\right)^2 - \frac{q^2}{\lambda^2}(\bar\alpha + \bar\alpha_1)^2 + 4q^2\bar\alpha\bar\alpha_1 = 0\,.$$

Die Bedingung, dem Kreise $(\mathfrak{K})$ soll ein Kreis $(\bar{\mathfrak{K}})$ der Ebene $(\bar\alpha, \bar\alpha_1)$ entsprechen, ist also nur dann zu erfüllen, wenn diese Kurve vierter Ordnung in zwei Kreise entartet. Sind.

$$\bar\alpha\bar\alpha_1 + \bar p(\bar\alpha + \bar\alpha_1) + \bar q(\bar\alpha - \bar\alpha_1) + \bar r = 0,$$
$$\bar\alpha\bar\alpha_1 + P(\bar\alpha + \bar\alpha_1) + Q(\bar\alpha - \bar\alpha_1) + R = 0$$

die Gleichungen dieser beiden Kreise, so sind die Koeffizienten $\bar p, \bar q, \dots R$ so zu bestimmen, daß das Produkt der linken Seiten der beiden vorstehenden Gleichungen identisch mit der linken Seite der Gleichung (39.) wird. Durch Koeffizientenvergleichung findet man die folgenden Relationen:

$$2\frac{p}{\lambda} = \bar p + \bar q + P + Q = \bar p - \bar q + P - Q,$$
$$2\frac{pq}{\lambda} = \bar p R + \bar q P + \bar q R + \bar r Q = \bar p R + \bar r P - \bar q R - \bar r Q,$$
$$\frac{p^2 - q^2}{\lambda^2} = \bar p P + \bar q Q + \bar q P + \bar p Q = \bar p P + \bar q Q - \bar q P - \bar p Q,$$
$$2\frac{p^2 - q^2}{\lambda} + 2r + 4q^2 = \bar r + R + 2\bar p P - 2\bar q Q,$$
$$r^2 = \bar r R.$$

Daraus folgt zunächst

$$\bar p = P, \qquad \bar q = -Q, \qquad \bar r = R$$

und demnach

$$\frac{p}{\lambda} = \bar{p}, \quad \frac{q^2}{\lambda^2} = \bar{q}^2, \quad \frac{pr}{\lambda} = \bar{p}\,\bar{r}, \quad r^2 = \bar{r}^2, \quad -\frac{q^2}{\lambda^2} + r + 2q^2 = \bar{r} + \bar{q}^2.$$

Nun sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wenn nämlich erstens p nicht gleich Null ist, so folgt aus der ersten und dritten Gleichung, daß r gleich $\bar{r}$ wird, die vierte Gleichung ist dann identisch erfüllt und aus der zweiten und fünften Gleichung ergibt sich

$$q^2(1-\lambda^2) = 0;$$

also da λ^2 nicht gleich 1 sein kann, weil dann beide Flächen auf einander abwickelbar wären, so muß q und damit auch $\bar{q}$ verschwinden. Dadurch erhält man aber nur die Kreise, welche die konformen Bilder der geodätischen Linien darstellen und deren Mittelpunkte auf der Achse des Reellen sich befinden, mit Ausnahme derjenigen, deren Mittelpunkte mit dem Nullpunkt zusammenfallen.

Ist aber zweitens p gleich Null, so ist nach der ersten Gleichung auch $\bar{p}$ gleich Null und daher die dritte Gleichung identisch erfüllt; aus der zweiten und fünften folgt aber

$$r - \bar{r} = 2q^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}.$$

Endlich ist nach der vierten Gleichung $\bar{r} = +r$ oder $\bar{r} = -r$. Wenn das erstere zutrifft, so folgt aus der vorstehenden Formel $q = 0$, und man erhält alle diejenigen Kreise, deren Mittelpunkte mit dem Nullpunkt zusammenfallen, die also ebenfalls konforme Bilder geodätischer Linien sind. Wenn dagegen $\bar{r} = -r$, so folgt

$$r = q^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}.$$

Man findet also in diesem Fall die Kreise mit der Gleichung

$$\alpha\alpha_1 \pm q(\alpha - \alpha_1) + q^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} = 0, \tag{40.}$$

deren Mittelpunkte auf der Achse des Imaginären gelegen sind. Sie bilden eine *einfach* unendliche Schar. Daß diese Kreise die verlangte Eigenschaft der Invarianz gegen eine affin-geodätische Abbildung besitzen, davon überzeugt am leichtesten die Identität

$$\left(\alpha\alpha_1 + q(\alpha - \alpha_1) + q^2\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)\left(\alpha\alpha_1 - q(\alpha - \alpha_1) + q^2\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)$$
$$= \left(\alpha\bar{\alpha}_1 + \frac{q}{\lambda}(\bar{\alpha} - \alpha_1) - q^2\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)\left(\bar{\alpha}\alpha_1 - \frac{q}{\lambda}(\alpha - \bar{\alpha}_1) - q^2\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right).$$

Bezeichnet man mit ϱ den Radius des Kreises (40.), so ist seine Gleichung mit der nachstehenden identisch

$$x^2 + (y \pm \lambda\varrho)^2 = \varrho^2, \qquad (41.)$$

und hieraus erkennt man, daß die sämtlichen Kreise dieser Schar ähnlich gelegen sind und den Nullpunkt als gemeinschaftlichen Ähnlichkeitspunkt besitzen. Vermöge der Formel (36.) ist

$$g = \pm\lambda\sqrt{-k},$$
$$\lambda = \cos\omega.$$

Dieses Ergebnis sagt aber aus, daß die sämtlichen geodätischen Kreise, deren konforme Bilder die Kreise (40.) sind, eine und dieselbe geodätische Krümmung besitzen. Diese Kreise bilden daher eine *einfach* unendliche Kreisschar ($\mathfrak{K}_g$).

Demnach besteht folgender Satz:

Bei jeder ***affin**-geodätischen Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf einander gibt es ein und nur ein bestimmtes* ***einfach*** *unendliches System von geodätischen Kreisen mit demselben Radius, welches invariant bleibt.*

Dieser Satz läßt nun nach zweierlei Richtung eine Umkehrung zu.

Ich werde nämlich zeigen, daß *wenn bei der geodätischen Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmaßes ein einfach unendliches System von geodätischen Kreisen mit demselben Radius invariant bleibt, die Abbildung notwendigerweise eine affin-geodätische sein muß.*

Ich werde aber ferner zeigen, daß die so erhaltene geodätische Abbildung für die Flächen konstanten Krümmungsmaßes charakteristisch ist. Es besteht nämlich der folgende allgemeinere Satz:

Lassen sich zwei Flächen in der Art auf einander geodätisch abbilden, daß eine einfach unendliche Schar von geodätischen Kreisen vom selben Radius eine ebensolche Schar zum Bilde hat, so ist das Krümmungsmaß der beiden Flächen konstant.

Beim Beweise dieses allgemeineren Satzes, auf den ich zunächst eingehe, ergibt sich von selbst die Richtigkeit der zuerst angeführten Umkehrung.

Zum Beweise des vorstehenden Satzes beachte man zunächst, daß nach dem im ersten Abschnitt mitgeteilten *Dini*schen Satze sich stets die beiden Flächen auf ein sich selbst entsprechendes orthogonales Kurvensystem (u, v) so beziehen lassen, daß ihre Linienelemente dl und dl' die durch die Gleichungen (1.) und (2.) definierten Werte erhalten. Ferner stelle man diejenigen Gleichungen auf, welchen auf der einen Fläche die Kurven gegebener konstanter geodätischer Krümmung g, auf der andern die Kurven konstanter geodätischer Krümmung g' Genüge leisten. Versteht man unter $\mathfrak{G}$ den Differentialausdruck

$$\mathfrak{G} = dv\, d^2u - du\, d^2v - \frac{1}{2}\,\frac{du^2+dv^2}{U-V}\,(V'du + U'dv),$$

welcher, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung der geodätischen Linien liefert, so lauten die beiden in Frage kommenden Gleichungen

$$\mathfrak{G} = g\,(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}\,(U-V)^{\frac{1}{2}}, \tag{42.}$$

$$\mathfrak{G} = g'\left(\frac{du^2}{U}+\frac{dv^2}{V}\right)^{\frac{3}{2}}(U-V)^{\frac{1}{2}}, \tag{43.}$$

in denen die linken Seiten wegen der geodätischen Abbildung beider Flächen auf einander identisch übereinstimmen müssen. Sollen nun, der Voraussetzung gemäß, unter den durch die vorstehenden Differentialgleichungen definierten Kurven zwei *einfach* unendliche Scharen einander entsprechen, so müssen für diese Scharen beide Gleichungen gleichzeitig bestehen. Dies ist für *beliebige* Funktionen U, V nicht möglich; denkt man sich aber diese passend bestimmt, so muß die betrachtete invariante Kurvenschar durch die Differentialgleichung

$$g\,(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}} = g'\left(\frac{du^2}{U}+\frac{dv^2}{V}\right)^{\frac{3}{2}}$$

definiert sein. Da g und g' als von Null verschieden vorauszusetzen sind, kann eine von Null verschiedene Konstante

$$m = \sqrt[3]{\frac{g'}{g}}$$

in die vorstehende Gleichung eingeführt werden, wodurch sie in die folgende übergeht:

$$(44.)\qquad du\sqrt{\frac{U-m^2}{U}}-dv\sqrt{\frac{m^2-V}{V}}=0,$$

in der den Quadratwurzeln beliebige Zeichen zu erteilen sind.

Nachdem dies festgestellt ist, soll bewiesen werden, daß die Gleichungen (42.) und (43.) nur für solche Funktionen U, V verträglich sind, welche die Linienelemente dl und dl' als den Flächen konstanten Krümmungsmaßes zugehörig charakterisieren. Zu dem Ende bilde man, unter R zur Abkürzung den Quadratwurzelquotienten $\sqrt{(U-m^2)V}:\sqrt{U(m^2-V)}$ verstanden, aus der Gleichung (44.) die Differentialausdrücke

$$dv=R\,du,$$

$$d^2v=R\,d^2u+\frac{m^2du^2}{U(m^2-V)}\left(U'\frac{VR}{U}+V'\frac{U-m^2}{m^2-V}\right),$$

also

$$dv\,d^2u-du\,d^2v=-\frac{m^2du^3}{U(m^2-V)}\left(U'\frac{VR}{U}+V'\frac{U-m^2}{m^2-V}\right),$$

$$\frac{du^2+dv^2}{U-V}=\frac{m^2du^2}{U(m^2-V)}$$

und berechne damit den Differentialausdruck

$$\mathfrak{G}=-\frac{1}{2}\frac{m^2du^3(U-V)\sqrt{V}}{U(m^2-V)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{U'}{\sqrt{U(U-m^2)}}+\frac{V'}{\sqrt{V(m^2-V)}}\right),$$

dann erhält man aus der Gleichung (42.) die Bedingung*)

$$(45.)\qquad -2gm\frac{U-V}{\sqrt{UV}}=\frac{U'}{\sqrt{U(U-m^2)}}+\frac{V'}{\sqrt{V(m^2-V)}},$$

welcher die Funktionen U, V zu genügen haben. Da auf der rechten Seite die Summe einer Funktion von u allein und einer von v allein steht, erhält man durch zweimalige Differentiation

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\sqrt{\frac{U}{V}}=\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\sqrt{\frac{V}{U}},$$

oder

$$UU'V'=VU'V'.$$

*) Diese Bedingung ist ein spezieller Fall der in den *Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft* III, S. 62, 1904, von mir angegebenen Gleichung.

Diese Gleichung kann nur dadurch befriedigt werden, daß U' oder V' oder beide gleich Null sind. Im letzteren Falle würde die linke Seite der Gleichung (45.) gleich Null sein müssen; da nun $U-V$ nicht beständig verschwinden kann, weil dann dl gleich Null wäre, weil ferner g und m von Null verschieden angenommen waren, so ist dieser Fall ausgeschlossen. Es verschwindet daher nur *eine* der beiden Funktionen U', V'. Sei $U' \lessgtr 0$, $V' = 0$, d. h. $V = A$, unter A eine von Null verschiedene Konstante verstanden. Die beiden betrachteten Flächen sind daher notwendigerweise auf Rotationsflächen abwickelbar, und die geodätische Abbildung ist von der speziellen Eigenschaft, daß das sich selbst entsprechende Orthogonalsystem (u, v) die Breitenkreise und Meridiane darstellt. Die Abbildung wäre also eine *affin*-geodätische, und damit die Richtigkeit der ersten der oben angeführten Behauptungen bewiesen, wenn man zeigen könnte, daß die betrachteten Flächen konstantes Krümmungsmaß besitzen.

Dies ist aber in der Tat möglich. Denn die Funktion U hat nunmehr gemäß der Formel (45.) noch die Gleichung

$$U' = -2g\frac{m}{\sqrt{A}}(U-A)\sqrt{U-m^2}$$

zu befriedigen, aus der sie sich durch eine Quadratur ermitteln läßt. Setzt man nämlich

$$k = -\frac{g^2 m^2}{A}, \tag{46.}$$

$$a^2 = k(A-m^2), \tag{47.}$$

und nimmt zunächst A und m^2 als verschieden an, so ergibt sich mit Unterdrückung einer zum Argument u additiv hinzutretenden Integrationskonstanten

$$U - A = \frac{-a^2}{k\sin^2(au)}.$$

Diese Gleichung ist aber mit der früher abgeleiteten Formel (29.) identisch. Wenn dagegen $A = m^2$ ist, so verschwindet die Integrationskonstante a und man erhält

$$k = -g^2 \tag{48.}$$

und

$$U - A = \pm\frac{1}{g^2 u^2};$$

also den in der Formel (33.) betrachteten Grenzfall. Das Linienelement dl kommt daher allemal den Flächen konstanten, *nicht verschwindenden* Krümmungsmaßes zu, dessen Wert k im ersten Fall jeden beliebigen Betrag annehmen kann, im zweiten Fall aber durch den Wert der geodätischen Krümmung des invarianten Kurvensystems gegeben und für ein reelles Kurvensystem negativ ist.

Damit ist die Richtigkeit des oben ausgesprochenen allgemeineren Satzes bewiesen.

Durch die vorstehende Untersuchung erhält man gleichzeitig dasjenige einfach unendliche System von geodätischen Kreisen gleicher geodätischer Krümmung, welches ein ebensolches System zum Bilde hat. Hierzu ist nur nötig, die Differentialgleichung (44.) nach Einführung der gefundenen Werte der Funktionen U und V zu integrieren. Diese Gleichung nimmt in dem Falle, wo a von Null verschieden ist, die folgende Gestalt an:

$$\frac{\cos(au)\,du}{\sqrt{g^2 m^2 \sin^2(au) + a^2}} - \frac{dv}{gm} = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$(49.)\qquad gm\sin(au) + \sqrt{g^2 m^2 \sin^2(au) + a^2} + gm\cdot C\cdot e^{av} = 0$$

lautet, wo C die Integrationskonstante ist.

Bildet man mittels der Formeln

$$x + iy = e^{ai(u+iv)}, \qquad x - iy = e^{-ai(u-iv)}$$

die Fläche konform auf eine Ebene ab und setzt

$$(50.)\qquad \begin{gathered} \frac{C}{a^2}\sqrt{a^2 + g^2 m^2} = \varrho, \\ \frac{gm}{\sqrt{a^2 + g^2 m^2}} = \lambda, \end{gathered}$$

so verwandelt sich die Gleichung (49.) in die Formel

$$x^2 + (y \pm \lambda\varrho)^2 = \varrho^2,$$

welche mit der früher entwickelten Gleichung (41.) für das invariante System geodätischer Kreise übereinstimmt. Man erhält also die Schar von Kreisen wieder, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen, und welche den Nullpunkt als gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt besitzen. Der Wert der

Konstanten λ in der Gleichung (50.) ist von dem in der Gleichung (41.) auftretenden Wert $g:\sqrt{-k}$ nicht verschieden.

Wenn die Konstante a verschwindet, also zufolge der Gleichung (47.) $A=m^2$ ist, so ist in der Differentialgleichung (44.) der Koeffizient von dv gleich Null, der von du dagegen wesentlich von Null verschieden. Die Gleichung ist daher nur erfüllt für das Kurvensystem

$$u = \text{konst.}$$

Da das Quadrat des Linienelements in diesem Falle den durch die Formel (33.) gegebenen Wert besitzt, so entspricht das obige Ergebnis der Tatsache, daß bei der „Pseudosphäre" die Breitenkreise konstante geodätische Krümmung haben.

Man kann die Tatsache, daß das Krümmungsmaß k stets einen *von Null verschiedenen* Wert besitzen muß, durch die folgende Fassung des soeben bewiesenen Satzes noch deutlicher hervortreten lassen.

Zwei nicht-euklidische Ebenen lassen sich stets so auf einander projektivisch beziehen, daß ein Büschel von Kreisen mit demselben Radius in ein ebensolches Büschel übergeht; zwei euklidische Ebenen aber nicht.

Unter projektivischer Beziehung ist dabei diejenige zu verstehen, bei welcher die Geraden einander entsprechen. Der Fall, in welchem die Ebenen zur Deckung gebracht werden können, ist ausdrücklich ausgeschlossen.

Charlottenburg, Dezember 1904.

Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln in einem zu ihrer Zentrallinie symmetrischen elektrostatischen Felde.

Von Herrn *M. Lange* in Hamburg.

Aus der Lösung, die *Kirchhoff**) für das Problem der Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln angibt, leitet Herr *Goebel***) im 124. und 125. Bande dieses Journals einfache Ausdrücke für die Dichtigkeit der Elektrizität in einem Punkte der Kugeloberfläche her. Im Anschluß an die Entwicklungen beider soll im folgenden die Aufgabe gelöst werden, die Verteilung der Elektrizität auf den Kugeln zu berechnen, wenn dieselben sich in einem elektrostatischen, zur Zentrallinie der Kugeln symmetrischen Felde befinden, welches nicht von Massen innerhalb der einen oder anderen Kugel herrührt. Die allgemeine Lösung ermöglicht es, die Verteilung der Elektrizität auf drei leitenden Kugeln mit gemeinsamer Zentrallinie zu berechnen, eine Aufgabe, die im folgenden nur skizziert wird und nur für den Fall durchgeführt wird, daß der Radius einer der Kugeln unendlich klein wird.

Wo die Entwicklung sich eng an die *Kirchhoff*schen Vorlesungen oder die *Goebel*schen Arbeiten anschließt, wird sie unter Hinweis auf die betreffenden Arbeiten nur in großen Zügen angegeben. Die Arbeiten werden dabei in der Form K VI. bzw. G I. und G II. zitiert.

*) Dieses Journal Bd. 59. *Kirchhoff-Planck:* Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, VI. Vorlesung.

**) *Goebel:* Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. Dieses Journal Bd. 124, S. 157—164, Bd. 125, S. 267—281.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Geheimrat Prof. *Schering*. Derselbe hat auch die Ausführung durch seinen Rat gefördert. Es sei mir gestattet, ihm auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

I.

Zwei leitende, sich weder durchdringende noch umschließende, noch berührende Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien a bzw. b, deren Mittelpunkte O_1 bzw. O_2 von einander den Abstand c haben, befinden sich in einem elektrostatischen Felde, welches symmetrisch ist zur Richtung der Zentrallinie der Kugeln. Die Quellen, von denen das Feld herrührt, liegen nicht innerhalb der einen oder der anderen Kugel. Die Kugeln selbst können geladen sein. Die konstanten Potentialwerte auf ihnen seien A bzw. B.

Der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte der Kugel K_1 werde mit ϱ, der Winkel der Richtung von ϱ gegen die nach O_2 hinweisende Richtung der Zentrallinie mit ϑ, dessen Kosinus mit μ, die Punkte der Zentrallinie mit x (von O_1 aus gemessen, und zwar positiv gerechnet in der Richtung $O_1 O_2$) bezeichnet. Es bedeuten ferner $f_{1a}(\varrho)$ und $f_{1i}(\varrho)$ das Potential der auf K_1 befindlichen Elektrizität bezüglich eines Punktes $\varrho\mu$, je nachdem dieser außerhalb oder innerhalb von K_1 liegt; ist $\mu = \pm 1$, so wird $f_{1a}(x)$, bzw. $f_{1i}(x)$ geschrieben; $f_{2a}(\varrho)$, $f_{2i}(\varrho)$, $f_{2a}(x)$, $f_{2i}(x)$ haben die entsprechende Bedeutung für K_2; durch $w(\varrho)$, $w(x)$ werde das Potential der äußeren Massen bezeichnet.

Dann ist für $-a < x < a$

$$(1.) \qquad f_{1i}(x) + f_{2a}(x) + w(x) = A;$$

für $c - b \leqq x \leqq c + b$

$$(2.) \qquad f_{1a}(x) + f_{2i}(x) + w(x) = B;$$

außerdem ist

$$f_{1a}(x) = \frac{a}{x} f_{1i}\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

$$f_{2i}(x) = \frac{b}{c-x} f_{2a}\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right).$$

Man ersetze wie in K VI. § 2 in (2.) $f_{1a}(x)$ durch seinen Wert aus der vorletzten Formel und eliminiere aus der so entstehenden Gleichung und aus (1.)

mittels der letzten Formel $f_{2i}(x)$; man erhält dann

$$(3.)\quad f_{1i}(x) - \frac{ab}{c^2-b^2-cx} f_{1i}(x_1) = A - B\frac{b}{c-x} - w(x) + \frac{b}{c-x} w\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right),$$

wo

$$x_1 = \frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}$$

gesetzt ist.

Da diese Funktionalgleichung in ihrem Gültigkeitsbereich sowohl, wie auch in ihrer linken Seite (auch in einem Teile der rechten) mit der Schlußgleichung in K VI. § 2 übereinstimmt, so kann sie nach der dort § 3–4 eingeschlagenen Methode gelöst werden. Setzt man also wie dort:

$$z = \frac{1-\frac{x}{a\xi}}{1-\frac{x\xi}{a}},$$

wo ξ ein positiver echter Bruch ist, der durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}, \quad \xi = \omega - \sqrt{\omega\;-1},$$

definiert ist, definiert man ferner eine (gleichfalls zwischen 0 und 1 liegende) Zahl q^2 durch die Gleichungen

$$q^2 = \frac{\xi c - a}{b} = \frac{b}{\frac{c}{\xi} - a},$$

so wird, wie dort bewiesen wird,

$$\frac{b}{c-x} = \frac{q^2}{\xi}\,\frac{1-\xi^2 z}{1-q^4 z}, \qquad \frac{ab}{c^2-b^2-cx} = q^2\,\frac{1-\xi^2 z}{1-\xi^2 q^4 z},$$

$$x = \frac{a\xi(1-z)}{1-\xi^2 z}, \qquad c - \frac{b^2}{c-x} = \frac{a}{\xi}\,\frac{1-\xi^2 q^4 z}{1-q^4 z}.$$

Setzt man dann noch

$$f_{1i}(x) = (1-\xi^2 z)\,\varphi(z),$$
$$f_{1i}(x_1) = (1-\xi^2 q^4 z)\,\varphi(q^4 z),$$

so erhält man für $\varphi(z)$ die Funktionalgleichung

$$\varphi(z) - q^2\varphi(q^4 z) = \frac{A}{1-\xi^2 z} - B\frac{q^2}{\xi}\,\frac{1}{1-q^4 z} - \frac{1}{1-\xi^2 z}\, w\left(\frac{a\xi(1-z)}{1-\xi^2 z}\right)$$
$$+ \frac{q^2}{\xi}\,\frac{1}{1-q^4 z}\, w\left(\frac{a}{\xi}\,\frac{1-\xi^2 q^4 z}{1-q^4 z}\right).$$

Die Lösung dieser Funktionalgleichung lautet

$$\varphi(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-\xi^2 q^{4n} z} - \frac{B}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-\xi^2 q^{4n} z}\, w\left(\frac{a\,\xi(1-q^{4n}z)}{1-\xi^2 q^{4n} z}\right)$$
$$+\frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}z}\, w\left(\frac{a}{\xi}\,\frac{1-\xi^2 q^{4n} z}{1-q^{4n} z}\right).$$

Man führe statt z und $\varphi(z)$ wieder x und $f_{1i}(x)$ ein und benutze gleichzeitig die in G I (6.)—(9.) gewählten Abkürzungen

$$s_{2n} = (1-\xi^2)\frac{q^{2n}}{1-\xi^2 q^{4n}}, \qquad t_{2n} = \xi\,\frac{1-q^{4n}}{1-\xi^2 q^{4n}},$$
$$u_{2n} = \frac{1-\xi^2}{\xi}\,\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}, \qquad v_{2n} = \xi\,\frac{1-\dfrac{q^{4n}}{\xi^2}}{1-q^{4n}};$$

dann erhält man

$$\text{(4.)}\quad \begin{cases} f_{1i}(x) = A + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A\frac{s_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}} - B\frac{u_{2n}}{1-\frac{x}{a}v_{2n}}\right) - w(x) \\ \quad - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}\, w\left(a t_{2n}\,\frac{1-\frac{x}{a}v_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}\right) \\ \quad + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{2n}}{1-\frac{x}{a}v_{2n}}\, w\left(\frac{a}{t_{2n}}\,\frac{1-\frac{x}{a}t_{2n}}{1-\frac{x}{a}v_{2n}}\right). \end{cases}$$

Man beachte, daß die beiden ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung mit der rechten Seite von G I. (5.) übereinstimmen. Diese beiden Glieder werden daher in der folgenden Rechnung nicht weiter untersucht, und ihr Vorhandensein, sowie das der sich durch die Rechnung aus ihnen ergebenden Größen, durch den Buchstaben 𝔊 angedeutet. 𝔊 hat also in den einzelnen Gleichungen verschiedene Bedeutung. Dieselbe kann jedoch jederzeit aus G I. und II. ermittelt werden. Was die Konvergenz der anderen Summen von (4.) anlangt, so beachte man, daß für $n = 1, 2 \ldots$ jeder Punkt $a t_{2n}\dfrac{1-\frac{x}{a}v_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}$ das elektrische Bild des entsprechenden Punktes $\dfrac{a}{t_{2n}}\,\dfrac{1-\frac{x}{a}t_{2n}}{1-\frac{x}{a}v_{2n}}$

an K_1 ist, jeder dieser letzteren Punkte das elektrische Bild des entsprechenden Punktes $a\, t_{2n-2} \dfrac{1-\frac{x}{a} v_{2n-2}}{1-\frac{x}{a} t_{2n-2}}$ an K_2, wenn unter $a\, t_0 \dfrac{1-\frac{x}{a} v_0}{1-\frac{x}{a} t_0}$ der Punkt x verstanden wird. Es gehört also für $n=1, 2\ldots$ und $|x| \leqq a$ jeder Punkt $a\, t_{2n} \dfrac{1-\frac{x}{a} v_{2n}}{1-\frac{x}{a} t_{2n}}$ dem Intervall $-a \ldots +a$, jeder Punkt $\dfrac{a}{t_{2n}} \dfrac{1-\frac{x}{a} t_{2n}}{1-\frac{x}{a} v_{2n}}$ dem Intervall $c-b \ldots c+b$ an. Daher kann w seiner physikalischen Bedeutung zufolge für keines der in (4.) in Frage kommenden Argumente unendlich oder unstetig werden, und es wird z. B. in der zweiten Summe von (4.)

$$\lim_{n=\infty} \frac{w_1\left(a\, t_{2n+2} \dfrac{1-\frac{x}{a} v_{2n+2}}{1-\frac{x}{a} t_{2n+2}}\right)}{w\left(a\, t_{2n} \dfrac{1-\frac{x}{a} v_{2n}}{1-\frac{x}{a} t_{2n}}\right)} = 1.$$

Da außerdem $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{s_{2n+2}\left(1-\frac{x}{a} t_{2n}\right)}{s_{2n}\left(1-\frac{x}{a} t_{2n+2}\right)} = q^2$ ist, so konvergiert die zweite Summe von (4.). Ebenso wird die Konvergenz der letzten Reihe dieser Gleichung bewiesen.

Für die folgende Rechnung wichtig sind noch einige Beziehungen zwischen s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n}. In G. I. S. 159 wird gezeigt, daß t_{2n} und v_{2n} positive echte Brüche mit der oberen Grenze ξ sind. Ferner findet man durch Rechnung, daß

$$(5.)\qquad t_{2n}\, u_{2n} = s_{2n}$$

ist. Bezeichnet man ferner die Größen, die aus s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n} hervorgehen, wenn man in ihnen ξ durch $\frac{1}{\xi}$ ersetzt, durch s'_{2n}, t'_{2n}, u'_{2n}, v'_{2n}, so erhält man

$$(6^a.)\quad s'_{2n} = -\frac{u_{2n}}{v_{2n}}, \qquad (6^c.)\quad u'_{2n} = -u_{2n},$$

$$(6^b.)\quad t'_{2n} = \frac{1}{v_{2n}}, \qquad (6^d.)\quad v'_{2n} = \frac{1}{t_{2n}}.$$

II.

Ihrer physikalischen Bedeutung zufolge kann für alle x des Intervalles $-a \ldots +a$ die Funktion $f_{1i}(x)$ durch eine Potenzreihe der Form

$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}$ dargestellt werden. Aus gleichem Grunde läßt sich für alle Werte x, die nicht dem Intervalle $c-b \dots c+b$ angehören, $f_{2a}(x)$ durch eine Potenzreihe der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B'_{\nu}\left(\frac{b}{c-x}\right)^{\nu+1}$ darstellen, eine Reihe, die für alle x des Intervalles $-c \dots c-b$ in eine solche der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}$ verwandelt werden kann. Daher muß sich nach (1.) auch $w(x)$ für alle Werte des Intervalles $-a \leqq x \leqq a$ durch eine Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}$ darstellen lassen. Ebenso läßt sich nach (2.) für alle Werte des Intervalls $c-b \dots c+b$ $w(x)$ darstellen durch eine Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D'_{\nu}\left(\frac{c-x}{b}\right)^{\nu}$; für ein Argument $c-\frac{b^2}{c-x}$ *) wird also $w(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D'_{\nu}\left(\frac{b}{c-x}\right)^{\nu}$, eine Reihe, die wiederum in eine solche der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}$ verwandelt werden kann. Setzt man in (4.) für $w(x)$ die Potenzreihen ein, so wird (4.) zu

$$f_{1i}(x)=\mathfrak{G}-\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}+\frac{u_2}{1-\frac{x}{a}v_2}\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}t_{2n}^{\nu}\left(\frac{1-\frac{x}{a}v_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}\right)^{\nu}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{2n+2}}{1-\frac{x}{a}v_{2n+2}}\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}t_{2n}^{\nu}\left(\frac{1-\frac{x}{a}v_{2n}}{1-\frac{x}{a}t_{2n}}\right)^{\nu}.$$

III.

Eine etwas einfachere Gestalt erhält $f_{1i}(x)$, wenn die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}$ die Funktion $w(x)$ auch noch im Intervalle $c-b<x\leqq c+b$ darstellt, oder wenn $w(x)$ in diesem Intervalle durch eine Potenzreihe der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}\left(\frac{a}{x}\right)^{\nu}$ dargestellt wird. Eine dieser Annahmen trifft zu, wenn $w(x)$ herrührt von einer Kugel K_3, deren Mittelpunkt O_3 auf O_1O_2 liegt und die keine der anderen Kugeln umschließt, durchdringt oder berührt; und zwar trifft die erste oder die zweite Annahme zu, jenachdem O_3 auf der Verlängerung von O_1O_2 oder auf O_1O_2 selbst liegt. Denn dann ist für jeden außer-

*) $c-\frac{b^2}{c-x}$ ist das elektrische Bild von x an K_2, liegt also in dem geforderten Intervall.

halb der Kugel K_3 liegenden Punkt der Zentrallinie $w(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu \left(\frac{e}{x-d}\right)^{\nu+1}$, wo e der Radius von K_3, $d = O_1 O_3$ ist. Im ersten Falle wird dann

$$f_{1i}(x) = \mathfrak{G} - \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \left(\frac{x}{a}\right)^\nu - \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu t_{2n}^\nu \frac{\left(1 - \frac{x}{a} v_{2n}\right)^\nu}{\left(1 - \frac{x}{a} t_{2n}\right)^{\nu+1}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{t_{2n}^\nu} \frac{\left(1 - \frac{x}{a} t_{2n}\right)^\nu}{\left(1 - \frac{x}{a} v_{2n}\right)^{\nu+1}}.$$

Die Gleichung, die man im zweiten Falle erhält, stimmt mit dieser bis auf den letzten Term überein, welcher zu $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu t_{2n}^\nu \frac{\left(1 - \frac{x}{a} v_{2n}\right)^{\nu-1}}{\left(1 - \frac{x}{a} t_{2n}\right)^\nu}$ wird. Verwandelt man $f_{1i}(x)$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{x}{a}$ fortschreitende Reihe, so werden in beiden Fällen deren Koeffizienten lineare Funktionen von w und seinen Ableitungen, also lineare Funktionen der Koeffizienten der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu \left(\frac{e}{x-d}\right)^{\nu+1}$. Diese Koeffizienten sind zunächst noch unbekannt; zu ihrer Berechnung benutze man die im Intervall $d - e \leq x \leq d + e$ geltende Gleichung

$$f_{1a}(x) + f_{2a}(x) + w(x) = E.$$

(K_3 befinde sich auf dem Potential E.) Da $f_{2a}(x)$ ebenso wie $f_{1a}(x)$ in eine Potenzreihe verwandelt werden kann, deren Koeffizienten lineare Funktionen der E_ν sind, so erhält man für diese Größen, deren Zahl man durch ein beliebig zu wählendes ν bestimmen kann, ein System von ebensoviel linearen Gleichungen.

Welche der Kugeln man als „dritte" ansieht, ist im allgemeinen gleichgültig. Falls die mittlere Kugel beide anderen berührt, muß man diese als K_3 ansehen, da andernfalls $q = 1$ wird und daher die Reihen in (4.) aufhören zu konvergieren.

IV.

Wird e unendlich klein, so wird $w(x) = \frac{E}{|am \mp x|}$, wo $am = |d|$ gesetzt ist und — ebenso wie in allen folgenden Gleichungen — bei positivem d

das obere, bei negativem d das untere Zeichen zu wählen ist. Führt man den Wert von $w(x)$ in (4.) ein, so erhält man

$$f_{1i}(x) = \mathfrak{G} - \frac{E}{|am \mp x|} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{2n}}{1 - \frac{x}{a} t_{2n}} \frac{E}{\left| am \mp a t_{2n} \frac{1 - \frac{x}{a} v_{2n}}{1 - \frac{x}{a} t_{2n}} \right|}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n}}{1 - \frac{x}{a} v_{2n}} \frac{E}{\left| a m \mp \frac{a}{t_{2n}} \frac{1 - \frac{x}{a} t_{2n}}{1 - \frac{x}{a} v_{2n}} \right|}$$

oder nach einigen Transformationen unter Benutzung von (5.)

$$(7.) \quad \begin{cases} f_{1i}(x) = \mathfrak{G} - \dfrac{E}{|am \mp x|} - \dfrac{E}{a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{s_{2n}}{(m \mp t_{2n}) \left(1 - \frac{x}{a} t_{2n} \frac{m \mp v_{2n}}{m \mp t_{2n}}\right)} \\ \qquad + \dfrac{E}{a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{s_{2n}}{|m t_{2n} \mp 1| \left(1 - \frac{x}{a} t_{2n} \frac{m v_{2n} \mp 1}{m t_{2n} \mp 1}\right)} . \end{cases}$$

Die Zeichen des absoluten Betrages konnten bis auf die beiden stehen gebliebenen fortgelassen werden. Da $d > a$ ist, so ist m jedenfalls größer als 1; m kann bei negativem d jeden Wert annehmen, der größer als 1 ist; bei positivem d ist außerdem das Intervall $\frac{c-b}{a} \dots \frac{c+b}{a}$ auszuschließen. Da $0 < t_{2n} < 1$ ist, so ist $m \mp t_{2n}$ jedenfalls positiv. Ferner würde sich aus $t_{2n} \frac{m \mp v_{2n}}{m \mp t_{2n}} > 1$ ergeben, daß $m < t_{2n} \frac{1 - v_{2n}}{1 - t_{2n}}$ wäre; dies ist jedoch unmöglich, da für jedes x des Intervalles $|x| < a$ $0 < t_{2n} \frac{1 - \frac{x}{a} v_{2n}}{1 - \frac{x}{a} t_{2n}} < 1$ ist. In derselben Weise zeigt man, daß $\left| t_{2n} \frac{m v_{2n} \mp 1}{m t_{2n} \mp 1} \right|$ nur dann > 1 werden kann, wenn m Werte annimmt, die es der Natur der Aufgabe zufolge nicht haben kann. Dagegen ist $|m t_{2n} - 1| = 1 - m t_{2n}$ oder $= m t_{2n} - 1$, jenachdem $a < d < c - b$ oder $c + b < d < \infty$ ist. Denn für $x = 0$ geht $\frac{a}{t_{2n}} \frac{1 - \frac{x}{a} t_{2n}}{1 - \frac{x}{a} v_{2n}}$, das dem Intervall $c - b \dots c + b$ angehört, in $\frac{a}{t_{2n}}$ über. (Für negative d kommt der Ausdruck

$|m t_{2n} - 1|$ in (7.) gar nicht vor. Der Fall $m t_{2n} - 1 = 0$ ist also durch die Natur der Aufgabe ausgeschlossen.)

Aus dem gesagten ergibt sich auch, daß jeder Summand der über n zu erstreckenden Summen in (7.) in eine nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{x}{a}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Man erhält dadurch

$$f_{1i}(x) = \mathfrak{G} - \frac{E}{a} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left[\frac{(\pm 1)^\varkappa}{m^{\varkappa+1}} - p_\varkappa + r_\varkappa\right] \left(\frac{x}{a}\right)^\varkappa,$$

wo

$$p_\varkappa = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{2n}}{m \mp t_{2n}} \left(t_{2n} \frac{m \mp v_{2n}}{m \mp t_{2n}}\right)^\varkappa, \qquad r_\varkappa = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{2n}}{m t_{2n} \mp 1} \left(t_{2n} \frac{m v_{2n} \mp 1}{m t_{2n} \mp 1}\right)^\varkappa$$

ist. Daraus folgt

$$f_{1i}(\varrho) = \mathfrak{G} - \frac{E}{a} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left[\frac{(\pm 1)^\varkappa}{m^{\varkappa+1}} - p_\varkappa + r_\varkappa\right] \left(\frac{\varrho}{a}\right)^\varkappa P_\varkappa,$$

$$f_{1a}(\varrho) = \mathfrak{G} - \frac{E}{a} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left[\frac{(\pm 1)^\varkappa}{m^{\varkappa+1}} - p_\varkappa + r_\varkappa\right] \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\varkappa+1} P_\varkappa,$$

wo $P_\varkappa$ die *Laplace*sche Kugelfunktion $P_\varkappa(\mu)$ bedeutet. Daraus erhält man für die Dichtigkeit h der Elektrizität in einem Punkte der Kugeloberfläche nach der Formel

$$4\pi a h = \left[\frac{\partial f_{1i}(\varrho)}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a} - \left[\frac{\partial f_{1a}(\varrho)}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a}$$

den Ausdruck

$$4\pi a h = \mathfrak{G} - \frac{E}{a} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left[\frac{(\pm 1)^\varkappa}{m^{\varkappa+1}} - p_\varkappa + r_\varkappa\right] [2\varkappa + 1] P_\varkappa$$

oder, wenn man für $p_\varkappa$ und $r_\varkappa$ ihre Werte einsetzt und die Summationen über $\varkappa$ und n vertauscht,

$$4\pi a h = \mathfrak{G} - \frac{E}{a} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^\varkappa}{m^{\varkappa+1}} (2\varkappa + 1) P_\varkappa - \frac{E}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{2n}}{m \mp t_{2n}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left(t_{2n} \frac{m \mp v_{2n}}{m \mp t_{2n}}\right)^\varkappa (2\varkappa + 1) P_\varkappa$$
$$+ \frac{E}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{2n}}{m t_{2n} \mp 1} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left(t_{2n} \frac{m v_{2n} \mp 1}{m t_{2n} \mp 1}\right)^\varkappa (2\varkappa + 1) P_\varkappa.$$

Die für $|z| < 1$ geltende Relation

$$T(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (2\varkappa + 1) z^\varkappa P_\varkappa = \frac{1 - z^2}{(1 - 2\mu z + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(vgl. G. I. 15) vereinfacht den letzten Ausdruck in

$$4\pi a h = \mathfrak{G} - \frac{E}{am} T\left(\pm\frac{1}{m}\right) - \frac{E}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{m\mp t_{2n}} T\left(t_{2n}\frac{m\mp v_{2n}}{m\mp t_{2n}}\right)$$
$$+\frac{E}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{|mt_{2n}\mp 1|} T\left(t_{2n}\frac{mv_{2n}\mp 1}{mt_{2n}\mp 1}\right).$$

$T(z)$ geht durch die Substitution $\mu = 2\lambda - 1$ über in

$$T(z) = \frac{1-z}{(1+z)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{4\lambda z}{(1+z)^4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun wird

$$\frac{s_{2n}}{m\mp t_{2n}}\left[\frac{1-z}{(1+z)^2}\right]_{z=t_{2n}\frac{m\mp v_{2n}}{m\mp t_{2n}}} = s_{2n}\frac{m(1-t_{2n})\mp t_{2n}(1-v_{2n})}{[m(1+t_{2n})\mp t_{2n}(1+v_{2n})]^2},$$

$$\frac{s_{2n}}{|mt_{2n}\mp 1}\left[\frac{1-z}{(1+z)^2}\right]_{z=t_{2n}\frac{mv_{2n}\mp 1}{mt_{2n}\mp 1}} = s_{2n}\frac{mt_{2n}(1-v_{2n})\mp(1-t_{2n})}{[mt_{2n}(1+v_{2n})\mp(1+t_{2n})]^2},$$

$$\left[\frac{z}{(1+z)^2}\right]_{z=t_{2n}\frac{m\mp v_{2n}}{m\mp t_{2n}}} = t_{2n}\frac{(m\mp v_{2n})(m\mp t_{2n})}{[m(1+t_{2n})\mp t_{2n}(1+t_{2n})]^2},$$

$$\left[\frac{z}{(1+z)^2}\right]_{z=t_{2n}\frac{mv_{2n}\mp 1}{mt_{2n}\mp 1}} = t_{2n}\frac{(mv_{2n}\mp 1)(mt_{2n}\mp 1)}{[mt_{2n}(1+v_{2n})\mp(1+t_{2n})]^2}.$$

Die Formeln (6ª.) bis (6ᵈ.) lassen erkennen, daß der zweite dieser vier Ausdrücke aus dem ersten, der vierte aus dem dritten hervorgeht, wenn man in diesen ξ durch $\frac{1}{\xi}$ ersetzt. Setzt man also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{m\mp t_{2n}} T\left(t_{2n}\frac{m\mp v_{2n}}{m\mp t_{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(\xi) = \Psi(\xi),$$

so wird

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{mt_{2n}\mp 1} T\left(t_{2n}\frac{mv_{2n}\mp 1}{mt_{2n}\mp 1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n\left(\frac{1}{\xi}\right) = \Psi\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

und man erhält

$$4\pi a h = \mathfrak{G} - \frac{E}{am} T(\pm m) - \frac{E}{a}\left[\Psi(\xi) - \Psi\left(\frac{1}{\xi}\right)\right],$$

oder wenn man schließlich für $\mathfrak{G}$ seinen Wert aus G. I. (16.) einführt,

$$4\pi a h = A + A\psi(\xi) - B\psi\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{E}{am} T(\pm m) - \frac{E}{a}\left[\Psi(\xi) - \Psi\left(\frac{1}{\xi}\right)\right],$$

wo

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} T(t_{2n})$$

gesetzt ist.

Berühren die Kugeln einander, so wird $\xi = q = 1$, und $s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n}$ nehmen die unbestimmte Form an. Ihren wahren Wert erhält man, wenn man sie durch Benutzung der Beziehung $\frac{1-\xi^2}{1-q^4} = \frac{b\xi}{cq^2}$ und durch Einführung der Größen $\gamma = \frac{c}{b}$, $\sigma_{2n} = \frac{1-q^{4n}}{1-q^4}$ transformiert (vgl. G. I. S. 162—163). Der Grenzübergang $\xi = q = 1$ ergibt dann

$$s_{2n} = \frac{1}{1+n\gamma}, \qquad t_{2n} = \frac{n\gamma}{1+n\gamma}, \qquad u_{2n} = \frac{1}{n\gamma}, \qquad v_{2n} = \frac{n\gamma - 1}{n\gamma}.$$

Ferner substituiere man in $T(z)$ für μ die Größe τ durch die Gleichung

$$\tau = \frac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2 \frac{1}{2}\vartheta;$$

dann wird

$$T(z) = \frac{\frac{1+z}{(1-z)^2}(1+\tau)^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + \tau\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und, da $A = B$ wird,

$$4\pi a h = A - A(1+\tau)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n\gamma - 1}{[(2n\gamma-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2n\gamma+1}{[(2n\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$- \frac{E}{am} T(\pm m) + (1+\tau)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n\gamma - \frac{m \mp 1}{m \pm 1}}{\left[\left(2n\gamma - \frac{m \mp 1}{m \pm 1}\right)^2 + \tau\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2n\gamma + \frac{m \mp 1}{m \pm 1}}{\left[\left(2n\gamma + \frac{m \mp 1}{m \pm 1}\right)^2 + \tau\right]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Für den Berührungspunkt der Kugeln ($\tau = \infty$) nehmen die Reihen die unbestimmte Form an. Eine nähere Untersuchung für diesen Punkt erübrigt sich, da nach G. II. S. 267 die erste Summe divergiert. Der Betrag der vier Brüche unter den Summenzeichen wird am größten, wenn $\tau = 0$ wird, da τ seiner Natur nach nicht negativ werden kann. Setzt man $\tau = 0$, so erhält man vier Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\gamma - a)^2}$, wo a eine Konstante ist. Da diese Reihe konvergiert, so gilt das gleiche für jedes endliche τ.

Einfache Reihen erhält man für die auf der Kugel vorhandene Elektrizitätsmenge ε. Im folgenden werde nur der Fall behandelt, daß d positiv

und größer als c ist. Nach der Formel

$$\varepsilon = a f_{1i}(0)$$

erhält man aus (4.)

$$\frac{\varepsilon}{a} = A + A \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} - B \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} - w(0) - \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} w(a t_{2n}) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} w\left(\frac{a}{t_{2n}}\right),$$

und wenn $w(x) = \frac{E}{am - x}$ gesetzt wird, unter Benutzung von (5.)

$$\frac{\varepsilon}{a} = A + A \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} - B \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} - \frac{E}{am} - \frac{E(1+m)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \frac{1 - t_{2n}}{(m - t_{2n})(1 - m t_{2n})}.$$

Besonders einfache Gestalt nimmt diese Formel an, wenn $A = B$ und $a = b$ wird. Das letztere bedingt, daß $\xi = q$ wird (vgl. G. II. S. 281). Setzt man dann die Werte von s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n} ein, so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{a} = A - A(1-q^2)(1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}(1+q^{4n+1})}{(1-q^{4n})(1-q^{4n+2})} - \frac{E}{am}$$
$$+ \frac{E}{a} \frac{(1-q^2)(1-q)(m+1)}{(m-q)(mq-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}(1+q^{4n+1})}{\left[1 - q^{4n+1}\frac{mq-1}{m-q}\right]\left[1 - q^{4n+1}\frac{m-q}{mq-1}\right]}.$$

Berühren die Kugeln einander, so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{a} = A - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\gamma(n\gamma+1)} - \frac{E}{am} + \frac{E}{a} \frac{m+1}{(m-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[n\gamma + \frac{m}{m-1}\right]\left[n\gamma - \frac{1}{m-1}\right]}.$$

Wird $a = b$, also $\gamma = 2$, so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{a} = A - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{E}{am} + \frac{E}{a} \frac{m+1}{(m-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[2n + \frac{m}{m-1}\right]\left[2n - \frac{1}{m-1}\right]}.$$

Verallgemeinerung eines Satzes von *Gudermann* über sphärische, einander berührende Kreise.

Von Herrn *P. Kokott* in Neiße.

Denkt man sich auf einer Kugelfläche zwei Kreise, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren, so kann man in den Ring unendlich viele Kreise beschreiben, welche die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berühren, und von denen jeder den folgenden selbst wieder berührt. Hierbei ist es möglich, daß nach einem oder mehrmaligem Umlaufe die Kreisreihe sich schließt. Die Bedingung hierfür ist zuerst von *Steiner* gegeben worden zugleich mit der Angabe, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle der erste Kreis gezeichnet wird. Im 39. Bande dieses Journals hat *Gudermann* einen analytischen Beweis dieses Satzes gegeben. Der Zweck nachstehender Zeilen ist der Nachweis, daß der Satz in vollem Umfange auch dann noch Gültigkeit besitzt, wenn man den Gliedern der Kette die Bedingung auferlegt, daß sie sich unter konstantem Winkel ω schneiden; die Berührung ist dann nur der spezielle Fall $\omega = \pi$. Ich werde mich, was die Bezeichnungen anlangt, streng an die *Gudermann*sche Arbeit halten. Zwei auf einander folgende Kreise mögen sich in S schneiden, dann ist

$$\cos m'm = \cos m'M' \cos m M' + \sin m'M' \sin m M' \cos (v' - v),$$

andererseits

$$\cos m'm = \cos r \cos r' + \sin r \sin r' \cos \omega,$$

also

$$\cos (v' - v) + \cot (A - D + r) \cot (A - D + r')$$
$$= \frac{\cos r}{\sin (A - D + r)} \cdot \frac{\cos r'}{\sin (A - D + r')} + \frac{\sin r}{\sin (A - D + r)} \cdot \frac{\sin r'}{\sin (A - D + r')} \cos \omega.$$

Nun ist

$$\frac{\sin r}{\sin(A-D+r)}=\frac{\cos D}{\cos A}\cdot\frac{d-e\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\frac{\cos r}{\sin(A-D+r)}=\frac{\cos D}{\cos A}\,\frac{1+ed\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\cot(A-D+r)=\frac{1+ae\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\cos(v'-v)=1-\frac{(a^2-e^2)(1-\cos(\varphi'-\varphi))}{(a-e\cos\varphi)(a-e\cos\varphi')}.$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form $\alpha P+\beta P'+\gamma S=\delta$, in welchem P das Produkt $\cos\varphi\cos\varphi'$, P' das Produkt $\sin\varphi\sin\varphi'$ und S die Summe $\cos\varphi+\cos\varphi'$ bedeutet. Und zwar ist $\alpha=(1+d^2)(a^2-e^2)+2e^2(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$; $\beta=(1+d^2)(a^2-e^2)$; $\gamma=-2ed(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$; $\delta=(1+d^2)(a^2-e^2)-2d^2(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$.

Einen solchen Ausdruck kann man nun durch die Transformation

$$\cos\varphi=\frac{\cos\psi+\lambda}{1+\lambda\cos\psi}\qquad\text{oder}\qquad\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$$

in eine Gleichung von derselben Form überführen; verfügt man dann über die willkürliche Größe λ in der Weise, daß der Koeffizient von S verschwindet, daß also $\gamma\lambda^2+(\alpha-\delta)\lambda+\gamma=0$ wird, so nimmt die Gleichung die einfachere Gestalt an

$$(\alpha+\gamma\lambda)\cos\psi'\cos\psi+\beta\sin\psi'\sin\psi=\delta-\gamma\lambda.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß eine Wurzel λ stets kleiner als Eins ist, so daß die Transformation reell bleibt. In unserem Falle ist $\lambda_1=\frac{e}{d}$; $\lambda_2=\frac{d}{e}$, und wir wollen annehmen, daß $e<d$ ist. Wir erhalten dann

$$\cos(\psi'-\psi)=1-\frac{2(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

oder

$$\sin\frac{\psi'-\psi}{2}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}}.$$

Nun ist der geometrische Charakter der Transformation gerade derselbe, den *Gudermann* auf anderem Wege gefunden hat. Projiziert man nämlich die Mittelpunkte der Berührungskreise auf eine Ellipse, deren einer Brenn-

punkt der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist, und deren große Achse mit der Hauptachse derjenigen sphärischen Ellipse, welche der Ort der Mittelpunkte m ist, zusammenfällt, so werden die Projektionspunkte vom Brennpunkte aus unter dem konstanten Winkel $\psi' - \psi$ gesehen. Soll sich also die n-gliedrige Kreiskette nach u Umläufen schließen, so muß

$$\sin\frac{u\pi}{n} = \sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}}$$

oder

$$\sin\frac{u\pi}{n} = \sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\cos 2E - \cos(R-R')}{\cos 2E - \cos(R+R')}}$$

sein; setzt man $\omega = \pi$, so entsteht in der Tat die *Steiner*sche Relation.

In der Ebene heißt die entsprechende Bedingung

$$\sin\frac{u\pi}{n} = \sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(R-R')^2-\delta^2}{(R+R')^2-\delta^2}},$$

wenn δ die Mittelpunktsdistanz darstellt.

Durch ein dem vorigen ähnliches Rechnungsverfahren ist es möglich, den Satz inbezug auf dreidimensionale Gebilde in folgender Weise auszusprechen:

Man denke sich in dem Raume zwischen zwei Kugeln M und m, von denen die eine ganz innerhalb der anderen liegen soll, zwei andere Kugeln μ und μ', welche M und m berühren, sich selbst aber unter einem konstanten Winkel ω schneiden, dann bildet sich ihre Zentrallinie auf eine um den äußeren Ähnlichkeitspunkt gedachte Sphäre stets als konstanter Hauptkreisbogen ab. (Für einander berührende Kugeln hat *Clausen* den Satz in Band 7 dieses Journals bewiesen.) Schließt sich daher die Kugelreihe, deren Mittelpunkte in einem ebenen Schnitt durch die Punkte M und m liegen, so schließt sie sich auch in jeder Ebene, die durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln geht. Die analytische Bedingung hierfür ist $\sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(R-r)^2-\delta^2}{(R+r)^2-\delta^2}}$. *Steiner* hat sich mehrfach mit der Frage beschäftigt, unter welcher Voraussetzung sich die Kugeln rings um eine Kugel μ scharen können, indem sie einander der Reihe nach berühren, und die letzte nach einem oder mehreren Umläufen sich der ersten anschmiegt. Durch einen Satz, den Herr *Emch* für eben gelegene Kreise in The University of Colorado Studies Vol. 1. Nr. 2, 1902 bewiesen hat, und der auch für Kreise

auf einer Sphäre gilt, ist man in den Stand gesetzt, die *Steiner*sche Gruppierung der Kugeln als einen besonderen Fall einer viel allgemeineren zu erkennen. Der Satz lautet:

Geht man von einer beliebigen Stelle eines Kreises auf einer Kugelfläche mit stets gleich langen, auf größten Kreisen abgemessenen Schritten nach einem anderen ihn umschließenden Kreise, von da zurück zum kleinen Kreise u. s. f., und gelangt man wieder zur Ausgangsstelle zurück, so schließt sich stets der Weg, von wo aus man ihn auch antreten möge.

Faßt man die gleich langen Schritte als Projektionen der Zentrallinien einander schneidender Kugeln auf, so ergibt sich folgender Satz:

Denkt man sich auf dem Rotationsellipsoide, das den Ort der Mittelpunkte der die Kugeln M und m berührenden Kugeln darstellt, zwei Ellipsen und legt den Mittelpunkt einer Kugel μ auf irgend einen Punkt der Peripherie der inneren Ellipse, den Mittelpunkt einer zweiten Kugel μ', welche μ unter dem Winkel ω schneidet, auf die äußere Ellipse, dann eine dritte Kugel μ_1, die wiederum μ' unter ω schneidet, auf die innere Ellipse und so fort ringsherum, so ist diese Kugelreihe entweder kommensurabel oder inkommensurabel; ist sie kommensurabel, so ist die Stelle, wo die erste Kugel hingelegt wird, völlig gleichgültig. Solcher Ellipsenpaare, bei denen die Kugelreihe sich schließt, gibt es unendlich viele. Läßt man beide Ellipsen zusammenfallen, so erhält man die *Steiner*sche Anordnung der Kugeln. Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß das Schneiden der Gebilde unter konstantem Winkel wieder nur einen speziellen Fall des Schneidens von zwei inbezug auf den inneren Ähnlichkeitspunkt reziproken Gebilden, Kreisen oder Kugeln, darstellt, ohne daß dadurch der Charakter der Schließungsgesetze geändert wird.

GEORG REIMER — BERLIN W. 35
VERLAGSBUCHHANDLUNG — LÜTZOWSTRASSE 107-8.

DEUTSCHE SÜDPOLAR-EXPEDITION
1901—1903

IM AUFTRAGE DES REICHSAMTES DES INNERN

Herausgegeben von ERICH VON DRYGALSKI.

Bis Oktober 1906 erschienen:

BAND I: TECHNIK und GEOGRAPHIE

Heft 1: **Stehr, A., Der „Gauss“ und seine technischen Einrichtungen.** Mit Tafel I—XIII und 20 Abbildungen im Text.

Preis Mark 18.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 15.—.

BAND II: KARTOGRAPHIE. GEOLOGIE

Heft 1: 1. **v. Drygalski, E., Der Gaussberg, seine Kartierung und seine Formen.** Mit Tafel I und 8 Abbildungen im Text.
2. **Philippi, E., Geologische Beschreibung des Gaussberges.** Mit Tafel II—VII und 2 Abbildungen im Text.
3. **Reinisch, R., Petrographische Beschreibung der Gaussberg-Gesteine.** Mit Tafel VIII und 9 Abbildungen im Text.

Preis Mark 22.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 18.—.

BAND VI: ERDMAGNETISMUS BAND II

Heft 1: **Luyken, K., Das Variationshaus auf Kerguelen, seine Einrichtungen und Instrumente.** Mit Tafel I—V und 16 Abbildungen im Text.

Preis Mark 12.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 10.—.

BAND VII: BAKTERIOLOGIE, HYGIENE, SPORT

Heft 1: **Gazert, H., Proviant und Ernährung der deutschen Südpolar-Expedition 1901—1903.**

Preis Mark 7.50. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 6.20.

BAND IX: ZOOLOGIE BAND I

Heft 1: 1. **Michaelsen, W., Oligochaeten.** Mit Tafel I.
2. **Thiele, J., Leptostraken.** Mit Tafel II und 1 Abbildung im Text.

Preis Mark 8.50. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 7.—.

Heft 2: 1. **Budde-Lund, G., Die Landisopoden.** Mit Tafel III und IV.
2. **Meisenheimer, J., Die Pteropoden.** Mit Tafel V—VII.

Preis Mark 18.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 15.—.

Heft 3: **Apstein, C., Die Salpen.** Mit Tafel VIII—X und 42 Abbildungen im Text.

Preis Mark 10.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 8.40.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

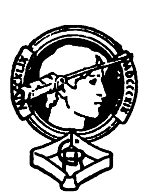
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 132.

Heft II.

Ausgegeben den 30. Januar.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1907.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 132. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

Will man die sämtlichen Darstellungen einer gegebenen endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen bestimmen, so hat man, wie ich in meiner Arbeit „Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen"*) gezeigt habe, in erster Linie eine *Darstellungsgruppe* $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ zu berechnen. Eine solche Gruppe $\mathfrak{K}$ ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. $\mathfrak{K}$ enthält eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{K}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{M}$, und es ist $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ isomorph;

2. der Kommutator von $\mathfrak{K}$ enthält alle Elemente von $\mathfrak{M}$;

3. es gibt keine Gruppe, welche die Eigenschaften 1 und 2 besitzt, und deren Ordnung größer ist als die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{K}$.

Einer Gruppe $\mathfrak{H}$ können auch mehrere Darstellungsgruppen entsprechen, dagegen ist die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{M}$, die ich (D., S. 23) den *Multiplikator* von $\mathfrak{H}$ nenne, eindeutig bestimmt.

Für die Diskussion der Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen genügt es, irgend eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ zu kennen. Dagegen ist es gruppentheoretisch von Interesse, eine Übersicht über die verschiedenen (nicht isomorphen) Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}$ zu gewinnen und die Anzahl dieser Gruppen genauer zu bestimmen. Diese Aufgabe wird in § 1 der vorliegenden Arbeit behandelt. Es wird insbesondere für die gesuchte Anzahl eine obere Schranke abgeleitet, die bei einer allgemeinen

---

*) Dieses Journal Bd. 127, S. 20. — Im folgenden mit D. zitiert.

Klasse von Gruppen $\mathfrak{H}$, nämlich bei den vollkommenen Gruppen,*) stets erreicht wird.

Kennt man für die gegebene Gruppe $\mathfrak{H}$ eine Gruppe $\mathfrak{K}$, welche die Eigenschaften 1 und 2 besitzt, so ist es im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, zu entscheiden, ob für sie auch die Eigenschaft 3 besteht. In § 2 leite ich ein Kriterium ab, das in vielen speziellen Fällen die Entscheidung dieser Frage erleichtert. Insbesondere ergibt sich der für die Anwendungen nützliche Satz, daß jede *abgeschlossene* Gruppe $\mathfrak{K}$, welche die Eigenschaften 1 und 2 aufweist, stets eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ ist. — Hierbei verstehe ich (D., S. 23) unter einer abgeschlossenen Gruppe eine Gruppe, deren Multiplikator die Ordnung 1 besitzt, die also als ihre eigene Darstellungsgruppe erscheint.

Die von mir in D., § 3, angegebene Methode zur Berechnung des Multiplikators einer Gruppe $\mathfrak{H}$ geht von der Betrachtung des allgemeinen Kompositionsschemas für die Elemente der Gruppe aus. In § 3 dieser Arbeit zeige ich, daß es zur Lösung dieser Aufgabe auch genügt, irgend ein vollständiges System von definierenden Relationen zwischen erzeugenden Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$ zu betrachten. Auf Grund dieser Methode bestimme ich in § 4 die Multiplikatorgruppen einer Reihe spezieller Gruppen, darunter auch der *Abel*schen Gruppen.

In § 5 stelle ich die Darstellungsgruppen der bekannten endlichen Gruppen auf, die man durch Betrachtung der binären linearen Substitutionen, deren Koeffizienten *Galois*sche Imaginäre sind, erhält. Die Bestimmung der Grade der sämtlichen irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen durch ganze oder gebrochene lineare Substitutionen (mit beliebigen Koeffizienten) ergibt sich alsdann durch Berechnung der Charaktere ihrer Darstellungsgruppen (§ 6).

§ 1.

Es sei

$$\mathfrak{H} = H_0 + H_1 + \cdots + H_{h-1} \qquad (H_0 = E)$$

eine endliche Gruppe der Ordnung h, die durch die h^2 Relationen

$$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots h-1)$$

*) Unter einer vollkommenen Gruppe versteht man eine Gruppe, die nur kogrediente Isomorphismen in sich zuläßt und keine invarianten Elemente, außer dem Hauptelement E, enthält (vgl. *Hölder*, Math. Ann., Bd. 46, S. 321).

bestimmt ist. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichne ich dann als eine durch die *Abel*sche Gruppe

$$\mathfrak{A} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{a-1}$$

ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ oder auch als eine Gruppe $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$, wenn $\mathfrak{G}$ die Elemente von $\mathfrak{A}$ als invariante Elemente enthält und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ isomorph ist (D., S. 22). Setzt man

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} G_0 + \mathfrak{A} G_1 + \cdots + \mathfrak{A} G_{h-1},$$

wobei der Komplex $\mathfrak{A} G_\lambda$ dem Element H_λ der mit $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ entsprechen möge, so besteht für die Elemente $G_0, G_1, \dots G_{h-1}$ ein System von h^2 Relationen

$$(1.) \qquad G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots h-1)$$

wo die $A_{\lambda,\mu}$ gewisse Elemente der Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ bedeuten. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist als vollständig bestimmt anzusehen, wenn die h^2 Elemente $A_{\lambda,\mu}$ gegeben sind; ich will daher sagen, die Gruppe $\mathfrak{G}$ *entspreche dem Elementensystem* $A_{\lambda,\mu}$. Setzt man noch $A_{\lambda,\mu} = A_{H_\lambda, H_\mu}$, so genügen diese Elemente, wie sich aus dem assoziativen Gesetz ergibt, den h^3 Relationen

$$(2.) \qquad A_{P,Q} A_{PQ,R} = A_{P,QR} A_{Q,R}. \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \dots H_{h-1})$$

Sind aber umgekehrt für irgend ein System von h^2 Elementen $A_{\lambda,\mu} = A_{H_\lambda, H_\mu}$ der Gruppe $\mathfrak{A}$ diese Bedingungen erfüllt, so bilden die ah Elemente

$$(3.) \qquad A_\alpha G_\lambda, \qquad (\alpha = 0, 1, \dots a-1, \ \lambda = 0, 1, \dots h-1)$$

wenn vorausgesetzt wird, daß $G_0, G_1, \dots G_{h-1}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sein und den Relationen (1.) genügen sollen, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung ah. Denn alsdann sind für die Komposition der ah Elemente (3.) alle Bedingungen der Gruppenbildung erfüllt. Diese Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann eine gewisse durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$.

Sind $C_0, C_1, \dots C_{h-1}$ irgend welche Elemente von $\mathfrak{A}$ und setzt man

$$\bar{A}_{\lambda,\mu} = C_\lambda C_\mu C^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} A_{\lambda,\mu},$$

so genügen auch die Elemente $\bar{A}_{\lambda,\mu} = \bar{A}_{H_\lambda, H_\mu}$ den Gleichungen (2.). Die beiden Elementensysteme $A_{\lambda,\mu}$ und $\bar{A}_{\lambda,\mu}$ sollen als einander *assoziiert* bezeichnet werden. Offenbar sind zwei Gruppen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$, die assoziierten Elementen-

systemen $A_{\lambda,\mu}$ und $\bar{A}_{\lambda,\mu}$ entsprechen, als nicht von einander verschieden anzusehen. Denn ersetzt man das vollständige Restsystem $G_0, G_1, \dots G_{h-1}$ von $\mathfrak{G}$ mod. $\mathfrak{A}$ durch das vollständige Restsystem $C_0 G_0, C_1 G_1, \dots C_{h-1} G_{h-1}$, so treten an Stelle der Elemente $A_{\lambda,\mu}$ die Elemente $\bar{A}_{\lambda,\mu}$.

Sind ferner $A_{\lambda,\mu}$ und $A'_{\lambda,\mu}$ zwei Elementensysteme von $\mathfrak{A}$, denen Gruppen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ entsprechen, so entspricht auch dem System der Elemente $A_{\lambda,\mu} A'_{\lambda,\mu}$ eine solche Gruppe. Denn auch diese Elemente genügen den Gleichungen (2.).

Es sei nun

$$\mathfrak{B} = B_0 + B_1 + \cdots + B_{a-1}$$

ebenso wie $\mathfrak{A}$ eine *Abel*sche Gruppe der Ordnung a. Sollen dann zwei durch die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergänzte Gruppen von $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} G_0 + \mathfrak{A} G_1 + \cdots + \mathfrak{A} G_{h-1}$$

und

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{B} G'_0 + \mathfrak{B} G'_1 + \cdots + \mathfrak{B} G'_{h-1},$$

die durch die Gleichungen

$$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \quad G'_\lambda G'_\mu = B_{\lambda,\mu} G'_{\varphi(\lambda,\mu)}$$

bestimmt sind, einander isomorph sein, so sind drei verschiedene Arten von Isomorphismen zu unterscheiden, die ich als Isomorphismen erster, zweiter und dritter Art bezeichnen will:

1. Es entspricht jedem Element des Komplexes $\mathfrak{A} G_\lambda$ ein Element des Komplexes $\mathfrak{B} G'_\lambda$. — Dann müssen die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sein. Man kann auch das vollständige Restsystem $G'_0, G'_1, \dots G'_{h-1}$ von $\mathfrak{G}'$ mod. $\mathfrak{B}$ so wählen, daß dem Element G_λ von $\mathfrak{G}$ das Element G'_λ von $\mathfrak{G}'$ entspricht; dann entspricht dem Element $A_{\lambda,\mu}$ das Element $B_{\lambda,\mu}$. Läßt sich umgekehrt ein Isomorphismus $\binom{A_\alpha}{B_\alpha}$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angeben, der das Element $A_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{A}$ in das Element $B_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{B}$ überführt, so erhält man, indem man dem Element $A_\alpha G_\lambda$ von $\mathfrak{G}$ das Element $B_\alpha G'_\lambda$ von $\mathfrak{G}'$ zuordnet, einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$.

2. Es entspricht jedem Element A_α von $\mathfrak{A}$ ein Element $\bar{B}_\alpha$ von $\mathfrak{B}$, ferner dem Element G_λ ein Element des Komplexes $\mathfrak{B} G'_{\chi(\lambda)}$, wo aber der Index $\chi(\lambda)$ nicht für jedes λ gleich λ ist. — Dann erhält man offenbar,

indem man dem Element H_λ von $\mathfrak{H}$ das Element $H_{\chi(\lambda)}$ entsprechen läßt, einen Automorphismus $\mathsf{H} = \binom{H_\lambda}{H_{\chi(\lambda)}}$ von $\mathfrak{H}$.*)

3. Es entsprechen Elementen von $\mathfrak{A}$ auch solche Elemente von $\mathfrak{G}'$, die nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten sind. — Dann brauchen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht isomorph zu sein. Ein solcher Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ kann aber nur dann bestehen, wenn $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ auch invariante Elemente enthalten, die nicht in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vorkommen. Dieser Fall kann also insbesondere nicht eintreten, wenn die Gruppe $\mathfrak{H}$ keine invarianten Elemente (außer E) enthält.

Über die Isomorphismen zweiter Art ist noch folgendes zu bemerken: Zunächst kann man durch passende Wahl des vollständigen Restsystems $G'_0, G'_1, \dots G'_{k-1}$ erreichen, daß dem Elemente G_λ von $\mathfrak{G}$ das Element $G'_{\chi(\lambda)}$ von $\mathfrak{G}'$ entspricht; dem Element $A_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{A}$ korrespondiert dann das Element $B_{\chi(\lambda),\chi(\mu)} = \overline{B}_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{B}$. Es sei nun speziell H ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{H}$; dann läßt sich also ein Element H_ϱ von $\mathfrak{H}$ angeben, so daß $H_{\chi(\lambda)} = H_\varrho^{-1} H_\lambda H_\varrho$ wird. Entsprechend wird

$$G'^{-1}_\varrho G'_\lambda G'_\varrho = C_\lambda G'_{\chi(\lambda)},$$

wo C_λ ein gewisses Element von $\mathfrak{B}$ bedeutet. Dann erhalten wir aber auch einen Isomorphismus *erster* Art zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, indem wir dem Element $A_\alpha G_\lambda$ von $\mathfrak{G}$ das Element $\overline{B}_\alpha C_\lambda^{-1} G'_\lambda$ von $\mathfrak{G}'$ zuordnen. Denn es entspricht alsdann dem Element

$$(A_\alpha G_\lambda)(A_\beta G_\mu) = A_\alpha A_\beta A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}$$

von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ das Element

$$\overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta \overline{B}_{\lambda,\mu} C^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} G'_{\varphi(\lambda,\mu)} = \overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta \overline{B}_{\lambda,\mu} G'_\varrho G'_{\chi\{\varphi(\lambda,\mu)\}} G'^{-1}_\varrho;$$

dies ist aber, weil $\chi\{\varphi(\lambda,\mu)\} = \varphi\{\chi(\lambda),\chi(\mu)\}$ ist, gleich

$$\overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta G'_\varrho G'_{\chi(\lambda)} G'_{\chi(\mu)} G'^{-1}_\varrho = (\overline{B}_\alpha C_\lambda^{-1} G'_\lambda)(\overline{B}_\beta C_\mu^{-1} G'_\mu).$$

Man hat daher neben den Isomorphismen erster Art nur solche Isomorphismen zweiter Art zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zu berücksichtigen, die auf äußere Automorphismen H von $\mathfrak{H}$ führen.

---

*) Nach dem Vorgange des Herrn *Frobenius* (Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1901, S. 1324) sollen die Isomorphismen einer Gruppe in sich als *Automorphismen* der Gruppe, die kogredienten Isomorphismen in sich als *innere*, die kontragredienten als *äußere* Automorphismen bezeichnet werden.

Ist demnach $\mathfrak{H}$ speziell eine vollkommene Gruppe, so genügt es, um nachzuweisen, daß zwei ergänzte Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{H}$ nicht isomorph sind, sich auf die Betrachtung der Isomorphismen erster Art zu beschränken.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wende ich mich zu der Behandlung der Aufgabe: *wie erhält man aus einer gegebenen Darstellungsgruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$ die etwa noch existierenden anderen Darstellungsgruppen?*

Es sei neben der Darstellungsgruppe $\mathfrak{R}=(\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ noch eine zweite Darstellungsgruppe $\mathfrak{R}'=(\mathfrak{N}', \mathfrak{H})$ bekannt. Dann sind die *Abel*schen Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ dem Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ isomorph; wir wollen sie daher beide mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Es sei

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{M} Q_0+\mathfrak{M} Q_1+\cdots+\mathfrak{M} Q_{h-1},$$

$$\mathfrak{R}'=\mathfrak{M} Q'_0+\mathfrak{M} Q'_1+\cdots+\mathfrak{M} Q'_{h-1},$$

ferner sei

$$Q_\lambda Q_\mu=J_{\lambda,\mu} Q_{\varphi(\lambda,\mu)}, \qquad Q'_\lambda Q'_\mu=J'_{\lambda,\mu} Q'_{\varphi(\lambda,\mu)},$$

wo $J_{\lambda,\mu}$ und $J'_{\lambda,\mu}$ Elemente von $\mathfrak{M}$ bedeuten.

Sind dann $M_0=E,\ M_1, \ldots M_{m-1}$ die Elemente, ferner

$$\psi_{M_\varrho}(J) \qquad (\varrho=0,1,\ldots m-1;\ \psi_{M_\varrho}(J)\,\psi_{M_\sigma}(J)=\psi_{M_\varrho M_\sigma}(J))$$

die m Charaktere der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{M}$, so repräsentieren die m Zahlensysteme

$$\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu})=r^{(\varrho)}_{H_\lambda, H_\mu}$$

m Lösungen der Gleichungen

$$\text{(4.)} \qquad r_{P,Q}\, r_{PQ,R}=r_{P,QR}\, r_{Q,R}, \qquad (P,Q,R=H_0, H_1, \ldots H_{h-1})$$

von denen nicht zwei assoziiert sind (vgl. D., §§ 1 und 2). Daher muß jede andere Lösung der Gleichungen (4.) einer dieser m Lösungen assoziiert sein. Dasselbe ist für die m Zahlensysteme $\psi_{M_\varrho}(J'_{\lambda,\mu})$ der Fall. Folglich muß jedem M_ϱ ein anderes wohlbestimmtes Element $\bar{M}_\varrho$ von $\mathfrak{M}$ entsprechen, so daß die Zahlensysteme $\psi_{\bar{M}_\varrho}(J'_{\lambda,\mu})$ und $\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu})$ einander assoziiert werden. Dann ist aber auch für je zwei Indizes ϱ und σ das System der h^2 Zahlen

$$\psi_{\bar{M}_\varrho}(J'_{\lambda,\mu})\,\psi_{\bar{M}_\sigma}(J'_{\lambda,\mu})=\psi_{\bar{M}_\varrho \bar{M}_\sigma}(J'_{\lambda,\mu})$$

dem Zahlensystem

$$\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu})\,\psi_{M_\sigma}(J_{\lambda,\mu}) = \psi_{M_\varrho M_\sigma}(J_{\lambda,\mu})$$

assoziiert. Daher erhalten wir einen Automorphismus A der Gruppe $\mathfrak{M}$, indem wir dem Element M_ϱ das Element $\bar{M}_\varrho$ zuordnen.

Es läßt sich dann bekanntlich ein anderer (eindeutig bestimmter) Automorphismus $\mathrm{B} = \binom{J}{\bar{J}}$ von $\mathfrak{M}$ angeben, so daß

$$\psi_{\bar{M}_\varrho}(J) = \psi_{M_\varrho}(\bar{\bar{J}})$$

wird. Es möge B das Element $J'_{\lambda,\mu}$ in $J''_{\lambda,\mu}$ überführen. Dann ist zunächst die Gruppe $\mathfrak{K}'$ der dem Elementensystem $J''_{\lambda,\mu}$ entsprechenden Gruppe

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{M}Q''_0 + \mathfrak{M}Q''_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q''_{h-1} \qquad (Q''_\lambda Q''_\mu = J''_{\lambda,\mu} Q''_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

isomorph. Ferner ist für diese Gruppe das Zahlensystem

$$\psi_{M_\varrho}(J''_{\lambda,\mu}) = \psi_{\bar{M}_\varrho}(J'_{\lambda,\mu})$$

dem Zahlensystem $\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu})$ assoziiert, d. h. es lassen sich h Größen c_0, $c_1, \ldots c_{h-1}$ bestimmen, so daß

$$\psi_{M_\varrho}(J''_{\lambda,\mu}) = \frac{c_\lambda c_\mu}{c_{\varphi(\lambda,\mu)}}\,\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu})$$

oder, was dasselbe ist,

$$\psi_{M_\varrho}(J''_{\lambda,\mu} J^{-1}_{\lambda,\mu}) = \frac{c_\lambda c_\mu}{c_{\varphi(\lambda,\mu)}}$$

wird. Betrachtet man jetzt die dem Elementensystem

$$J''_{\lambda,\mu} J^{-1}_{\lambda,\mu} = C_{\lambda,\mu}$$

entsprechende durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}G_0 + \mathfrak{M}G_1 + \cdots + \mathfrak{M}G_{h-1}, \qquad (G_\lambda G_\mu = C_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

so ist für diese Gruppe jedes der m Zahlensysteme $\psi_{M_\varrho}(C_{\lambda,\mu})$ dem Zahlensystem $\psi_{M_0}(C_{\lambda,\mu}) = 1$ assoziiert. Hieraus folgt aber nach den Ergebnissen von D., § 2, daß der Kommutator der Gruppe $\mathfrak{G}$ kein Element von $\mathfrak{M}$ außer dem Hauptelement E enthält.

Umgekehrt schließt man leicht, daß, wenn $\mathfrak{G}$ irgend eine Gruppe $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ ist, die durch das Elementensystem $C_{\lambda,\mu}$ bestimmt und deren Kommutator zu $\mathfrak{M}$ teilerfremd ist, die dem Elementensystem $J_{\lambda,\mu}\,C_{\lambda,\mu}$ entsprechende

Gruppe $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}''$ von $\mathfrak{H}$ ist. Denn es sind dann unter den m Zahlensystemen

$$\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu} C'_{\lambda,\mu}) \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots m-1)$$

nicht zwei einander assoziiert. — Hierbei führen offenbar zwei einander assoziierte Elementensysteme $C_{\lambda,\mu}$ und $C'_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{M}$ auf dieselbe Gruppe $\mathfrak{K}''$.

Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Es sei $\mathfrak{K}$ eine durch die Elemente $J_{\lambda,\mu}$ bestimmte Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$; es seien ferner höchstens n Systeme

$$C^{(0)}_{\lambda,\mu},\ C^{(1)}_{\lambda,\mu}, \ldots C^{(n-1)}_{\lambda,\mu}$$

von je h^2 Elementen der Gruppe $\mathfrak{M}$ vorhanden, von denen nicht zwei einander assoziiert sind, und die so beschaffen sind, daß die Kommutatorgruppen der ihnen entsprechenden n Gruppen $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$

$$\mathfrak{G}^{(\nu)} = \mathfrak{M}\, G^{(\nu)}_0 + \mathfrak{M}\, G^{(\nu)}_1 + \cdots + \mathfrak{M}\, G^{(\nu)}_{h-1} \quad \left(G^{(\nu)}_\lambda G^{(\nu)}_\mu = C^{(\nu)}_{\lambda,\mu} G^{(\nu)}_{\varphi(\lambda,\mu)}\right)$$

zu $\mathfrak{M}$ teilerfremd sind. Dann ist jede Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ einer der n durch die Gleichungen

$$Q^{(\nu)}_\lambda Q^{(\nu)}_\mu = J_{\lambda,\mu} C^{(\nu)}_{\lambda,\mu} Q^{(\nu)}_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

bestimmten Darstellungsgruppen

$$\mathfrak{K}^{(\nu)} = \mathfrak{M}\, Q^{(\nu)}_0 + \mathfrak{M}\, Q^{(\nu)}_1 + \cdots + \mathfrak{M}\, Q^{(\nu)}_{h-1}$$

isomorph.

Ehe ich zur Berechnung der hier definierten Zahl n schreite, will ich zeigen, daß zwischen je zweien der Gruppen $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ kein Isomorphismus erster Art bestehen kann. Denn es möge sich etwa zwischen $\mathfrak{K}^{(\varrho)}$ und $\mathfrak{K}^{(\sigma)}$ ein solcher Isomorphismus angeben lassen. Dann muß auch ein Automorphismus $\mathsf{A} = \binom{J}{J'}$ von $\mathfrak{M}$ existieren, der das Element $J_{\lambda,\mu} C^{(\varrho)}_{\lambda,\mu}$ in ein Element der Form

$$J_{\lambda,\mu} C^{(\sigma)}_{\lambda,\mu} C_\lambda C_\mu C^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} = J_{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}$$

überführt, wo die C_λ gewisse Elemente von $\mathfrak{M}$ bedeuten. Es wird dann, wenn A das Element $J_{\lambda,\mu}$ in $J'_{\lambda,\mu}$, das Element $C^{(\varrho)}_{\lambda,\mu}$ in $C'_{\lambda,\mu}$ überführt,

$$J_{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu} = J'_{\lambda,\mu} C'_{\lambda,\mu}.$$

Folglich ist auch für jeden Charakter $\psi_M(J)$ von $\mathfrak{M}$

$$(5.)\qquad \psi_M(J_{\lambda,\mu})\,\psi_M(F_{\lambda,\mu}) = \psi_M(J'_{\lambda,\mu})\,\psi_M(C'_{\lambda,\mu}).$$

Nun ist aber, wenn $\psi_M(J') = \chi(J)$ gesetzt wird, auch $\chi(J)$ ein Charakter von $\mathfrak{M}$; es sei etwa $\chi(J) = \psi_{\bar{M}}(J)$. Dann folgt aber aus (5.), weil sowohl die Ausdrücke $\psi_M(F_{\lambda,\mu})$ als auch die Ausdrücke

$$\psi_M(C'_{\lambda,\mu}) = \psi_{\bar{M}}(C^{(\varrho)}_{\lambda,\mu})$$

sich auf die Form $\frac{c_\lambda c_\mu}{c_{\varphi(\lambda,\mu)}}$ bringen lassen, daß die Zahlensysteme $\psi_M(J_{\lambda,\mu})$ und

$$\psi_M(J'_{\lambda,\mu}) = \psi_{\bar{M}}(J_{\lambda,\mu})$$

einander assoziiert sind. Daher muß $\bar{M} = M$ und also auch $J'_{\lambda,\mu} = J_{\lambda,\mu}$ sein. Da nun aber die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{K}$ alle Elemente von $\mathfrak{M}$ enthält und offenbar jedes Element von $\mathfrak{M}$, das ein Produkt von Kommutatorelementen der Gruppe $\mathfrak{K}$ ist, sich auch als Produkt der Elemente $J_{\lambda,\mu}$ darstellen läßt, so erzeugen die Elemente $J_{\lambda,\mu}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{M}$. Daher muß, weil $J'_{\lambda,\mu} = J_{\lambda,\mu}$ ist, A der identische Automorphismus sein. Demnach ist $C'_{\lambda,\mu} = C^{(\varrho)}_{\lambda,\mu} = F_{\lambda,\mu}$, d. h. die Elementensysteme $C^{(\varrho)}_{\lambda,\mu}$ und $C^{(\sigma)}_{\lambda,\mu}$ sind einander assoziiert. Dies erfordert aber, daß $\varrho = \sigma$ wird.

Ist daher $\mathfrak{H}$ speziell eine vollkommene Gruppe, so sind unter den n Gruppen $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ nicht zwei isomorph. — Dagegen können, wenn $\mathfrak{H}$ keine vollkommene Gruppe ist, zwischen den Gruppen $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ noch Isomorphismen zweiter oder auch dritter Art bestehen, die von Fall zu Fall besonders zu untersuchen sind.

Es soll nun gezeigt werden, wie man die n Elementensysteme $C^{(\nu)}_{\lambda,\mu}$ zu bestimmen hat.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}G_0 + \mathfrak{M}G_1 + \cdots + \mathfrak{M}G_{h-1} \qquad (G_\lambda G_\mu = C_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

eine der n Gruppen $\mathfrak{G}^{(\nu)}$. Der Voraussetzung nach repräsentieren die Elemente $R'_0, R'_1, \ldots R'_{r-1}$ des Kommutators $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{G}$ genau r mod. $\mathfrak{M}$ inkongruente Elemente von $\mathfrak{G}$. Da wir das Elementensystem $C_{\lambda,\mu}$ durch ein ihm assoziiertes System, oder was dasselbe ist, jedes Element G_λ durch ein anderes Element des Komplexes $\mathfrak{M}G_\lambda$ ersetzen dürfen, können wir annehmen, daß die Elemente $R'_0, R'_1, \ldots R'_{r-1}$ unter den h Elementen G_λ vorkommen.

Es sei nun $\mathfrak{K}$ der Kommutator von $\mathfrak{H}$ und

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} T_0 + \mathfrak{K} T_1 + \cdots + \mathfrak{K} T_{s-1}. \qquad (rs = h,\ T_0 = E)$$

Bezeichnet man die Komplexe $\mathfrak{K} T_0, \mathfrak{K} T_1, \ldots \mathfrak{K} T_{s-1}$, die die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ bilden, mit $S_0, S_1, \ldots S_{s-1}$, ferner, wenn $T_\sigma = H_\lambda$ ist, das Element G_λ von $\mathfrak{G}$ mit T''_σ und den Komplex $\mathfrak{K}' T''_\sigma$ mit S'_σ, so wird, falls noch

$$S_\varrho S_\sigma = S_{\chi(\varrho,\sigma)} \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, \ldots s-1)$$

ist,

$$(6.) \qquad S'_\varrho S'_\sigma = S'_\sigma S'_\varrho = D_{\varrho,\sigma} S'_{\chi(\varrho,\sigma)};$$

hierbei bedeutet $D_{\varrho,\sigma} = D_{\sigma,\varrho} = D_{S_\varrho, S_\sigma}$ ein gewisses Element von $\mathfrak{M}$.

Man zeigt nun ohne Mühe, daß durch die s^2 Elemente $D_{\varrho,\sigma}$ alle h^2 Elemente $C_{\lambda,\mu}$ mitbestimmt sind, ferner, daß die h^3 aus dem assoziativen Gesetz hervorgehenden (den Gleichungen (2.) analogen) Bedingungsgleichungen für die Elemente $C_{\lambda,\mu}$ sich auf die s^3 Relationen

$$(7.) \qquad D_{S,T} D_{ST,U} = D_{S,TU} D_{T,U} \qquad (S, T, U = S_0, S_1, \ldots S_{s-1})$$

reduzieren. Daraus folgt, daß die Bestimmung der Elementensysteme $C_{\lambda,\mu}$ identisch ist mit der Bestimmung der verschiedenen (einander nicht assoziierten) Systeme $D_{S_\varrho, S_\sigma} = D_{S_\sigma, S_\varrho}$, die den Bedingungen (7.) genügen, oder, was dasselbe ist, die so beschaffen sind, daß die Gleichungen (6.) eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte *Abel*sche Gruppe von $\mathfrak{S}$ definieren.

Es seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ die Invarianten der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{S}$, ferner mögen die Elemente $S_1, S_2, \ldots S_k$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ bilden, wobei das Basiselement $S_\varkappa$ zu dem Exponenten $\varepsilon_\varkappa$ gehören möge. Ist dann

$$S_\varrho = S_1^{a_{\varrho 1}} S_2^{a_{\varrho 2}} \ldots S_k^{a_{\varrho k}}, \qquad (\varrho = k+1, k+2, \ldots s-1)$$

so lassen sich die Elemente $T'_{k+1}, T'_{k+2}, \ldots T'_{s-1}$ innerhalb der Komplexe $\mathfrak{M} T'_{k+1}, \mathfrak{M} T'_{k+2}, \ldots \mathfrak{M} T'_{s-1}$ so wählen, daß auch

$$S'_\varrho = S_1'^{a_{\varrho 1}} S_2'^{a_{\varrho 2}} \ldots S_k'^{a_{\varrho k}} \qquad (\varrho = k+1, k+2, \ldots s-1)$$

wird. Dann sind die s^2 Elemente $D_{\varrho,\sigma}$ vollständig bestimmt, wenn man die k Elemente $D_1, D_2, \ldots D_k$ kennt, für die

$$S_1'^{\varepsilon_1} = D_1 \mathfrak{K}', \quad S_2'^{\varepsilon_2} = D_2 \mathfrak{K}', \ldots S_k'^{\varepsilon_k} = D_k \mathfrak{K}'$$

ist.

Die Elemente $D_1, D_2, \dots D_k$ unterliegen aber keiner einschränkenden Bedingung; denn man überzeugt sich leicht, daß bei jeder Wahl derselben das ihnen entsprechende Elementensystem D_{s_ϱ, s_σ} den Bedingungen (7.) genügt. Es entspricht daher auch jeder beliebigen Wahl von k Elementen $D_1, D_2, \dots D_k$ innerhalb der Gruppe $\mathfrak{M}$ ein System von Elementen $C_{\lambda,\mu}$, welches die verlangte Eigenschaft besitzt.

Über die Wahl der Elemente $T_1'', T_2'', \dots T_k''$ innerhalb der Komplexe $\mathfrak{M}T_1', \mathfrak{M}T_2', \dots \mathfrak{M}T_k'$ ist jedoch noch nicht verfügt worden. Sind daher $M_1, M_2, \dots M_k$ beliebige k Elemente von $\mathfrak{M}$, so entspricht den beiden Systemen $D_1, D_2, \dots D_k$ und $D_1 M_1^{\varepsilon_1}, D_2 M_2^{\varepsilon_2}, \dots D_k M_k^{\varepsilon_k}$ dieselbe Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir sehen also, daß die gesuchte Anzahl n gleich ist der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, innerhalb der Gruppe $\mathfrak{M}$ Elemente D_1, $D_2, \dots D_k$ auszuwählen, wobei zwei Systeme $D_1, D_2, \dots D_k$ und $D_1', D_2', \dots D_k'$ als nicht verschieden anzusehen sind, wenn sich k Elemente $M_1, M_2, \dots M_k$ bestimmen lassen, so daß

$$D_1' = D_1 M_1^{\varepsilon_1},\ D_2' = D_2 M_2^{\varepsilon_2}, \dots D_k' = D_k M_k^{\varepsilon_k}$$

wird.

Auf Grund dieses Ergebnisses läßt sich n leicht explizit angeben, wenn man die Invarianten $e_1, e_2, \dots e_l$ der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{M}$ als bekannt annimmt. Es mögen nämlich alsdann $F_1, F_2, \dots F_l$ eine Basis von $\mathfrak{M}$ bilden, und es sei e_λ die Ordnung von F_λ. Setzt man dann

$$D_\alpha = F_1^{d_{\alpha 1}} F_2^{d_{\alpha 2}} \dots F_l^{d_{\alpha l}}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots k)$$

so ersieht man, daß n gleich ist der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, kl Zahlen $d_{\alpha\beta}$ derart zu wählen, daß $d_{\alpha\beta}$ einen der Werte $0, 1, \dots e_\beta - 1$ annimmt, wobei zwei Systeme $d_{\alpha\beta}$ und $d'_{\alpha\beta}$ als nicht verschieden zu gelten haben, falls $d'_{\alpha\beta} - d_{\alpha\beta}$ sich auf die Form $x\varepsilon_\alpha + y e_\beta$ bringen läßt. Hieraus ergibt sich aber für n der Wert

$$n = \prod_{\alpha,\beta} (\varepsilon_\alpha, e_\beta), \qquad (\alpha = 1, 2, \dots k;\ \beta = 1, 2, \dots l)$$

wo $(\varepsilon_\alpha, e_\beta)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen ε_α und e_β bedeutet. Wir erhalten also den Satz:

I. *Ist $\mathfrak{R}$ der Kommutator der Gruppe $\mathfrak{H}$, sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_k$ die Invarianten der Abelschen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}}$ und $e_1, e_2, \dots e_l$ die Invarianten des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$, so ist die Anzahl der verschiedenen Darstellungsgruppen*

von $\mathfrak{H}$ *höchstens gleich* $\prod_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha, e_\beta)$ *und stets genau gleich dieser Zahl, wenn* $\mathfrak{H}$ *eine vollkommene Gruppe ist.*

Speziell ergibt sich hieraus:

II. *Sind die Ordnungen der Gruppe* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}}$ *und* $\mathfrak{M}$ *teilerfremde Zahlen, so besitzt* $\mathfrak{H}$ *nur eine Darstellungsgruppe.*

Dieser Fall tritt insbesondere ein, wenn der Kommutator von $\mathfrak{H}$ mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, ein Resultat, das ich in D., § 3, auf anderem Wege abgeleitet habe.

§ 2.

In enger Beziehung zu der eben durchgeführten Untersuchung steht die allgemeinere Aufgabe: wenn eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ und eine beliebige Gruppe $\mathfrak{H}$ gegeben sind, alle durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzten Gruppen von $\mathfrak{H}$ zu bestimmen. — An dieser Stelle will ich mich damit begnügen, diese Aufgabe unter Hinzunahme der Forderung zu behandeln, daß die Kommutatorgruppen der zu bestimmenden Gruppen alle Elemente der Untergruppe $\mathfrak{A}$ enthalten sollen.*)

Es sei

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A} L_0 + \mathfrak{A} L_1 + \cdots + \mathfrak{A} L_{h-1}$$

*) Die Bedeutung dieser Gruppen beruht auf folgendem. — Man habe irgend eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ von h gebrochenen linearen Substitutionen

$$x_\varkappa = \frac{a_{\varkappa 1}^{(\alpha)} y_1 + \cdots + a_{\varkappa, n-1}^{(\alpha)} y_{n-1} + a_{\varkappa, n}^{(\alpha)}}{a_{n1}^{(\alpha)} y_1 + \cdots + a_{n, n-1}^{(\alpha)} y_{n-1} + a_{n, n}^{(\alpha)}}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n-1)$$

Man betrachte die h Matrizen n-ten Grades $A_\alpha = (a_{\varkappa\lambda}^{(\alpha)})$. Dann erzeugen die Matrizen $A_\alpha A_\beta A_\alpha^{-1} A_\beta^{-1}$ eine endliche Gruppe $\mathfrak{R}'$; die in $\mathfrak{R}'$ enthaltenen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varrho & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varrho \end{pmatrix}$$

bilden eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Ordnung a sei. Man kann dann h Konstanten r_α bestimmen, so daß die Matrizen $r_\alpha A_\alpha$ eine endliche Gruppe der Ordnung ah erzeugen (vgl. D., §§ 2 und 3). Jede der so entstehenden Gruppen ist dann eine durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, die die im Texte verlangte Eigenschaft besitzt.

eine solche Gruppe; man bezeichne die Ordnung der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit a, ferner ihre a Charaktere mit

$$\chi^{(0)}(A),\ \chi^{(1)}(A), \dots \chi^{(a-1)}(A).$$

Ist dann $\mathfrak{K}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$, für die die Zeichen M_ϱ, $J_{\lambda,\mu}$ und $\psi_{M_\varrho}(J)$ dieselbe Bedeutung haben wie früher, und ist noch

$$L_\lambda L_\mu = A_{\lambda,\mu} L_{\varphi(\lambda,\mu)}, \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots h-1)$$

wo die $A_{\lambda,\mu}$ gewisse Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}$ bedeuten, so sind die a Zahlensysteme

$$(8.) \qquad \chi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}) \qquad (\alpha = 0, 1, \dots a-1)$$

wegen der über die Gruppe $\mathfrak{L}$ gemachten Voraussetzung genau a verschiedenen unter den m Zahlensystemen

$$\psi_{M_\varrho}(J_{\lambda,\mu}) \qquad (\varrho = 0, 1, \dots m-1)$$

assoziiert (D., § 2). Es seien dies die Zahlensysteme

$$(9.) \qquad \psi_{M_0}(J_{\lambda,\mu}),\ \psi_{M_1}(J_{\lambda,\mu}), \dots \psi_{M_{a-1}}(J_{\lambda,\mu}).$$

Dann bilden die a Elemente $M_0, M_1, \dots M_{a-1}$ eine der Gruppe $\mathfrak{A}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$. Betrachtet man dann die zu $\mathfrak{M}'$ reziproke Untergruppe von $\mathfrak{M}$, d. h. diejenige Gruppe $\mathfrak{N}$, die aus allen den a Bedingungen

$$\psi_{M_\alpha}(N) = 1 \qquad (\alpha = 0, 1, \dots a-1)$$

genügenden Elementen N von $\mathfrak{M}$ besteht, so ist die Gruppe $\mathfrak{M}'$, und also auch $\mathfrak{A}$ der Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ isomorph. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{A}$ die Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ selbst bedeute.

Ist dann etwa

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} K_0 + \mathfrak{N} K_1 + \dots + \mathfrak{N} K_{a-1},$$

und bedeutet das Element A_β den Komplex $\mathfrak{N} K_\beta$, so repräsentieren die Wertsysteme

$$\chi^{(\alpha)}(A_\beta) = \chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N} K_\beta) = \psi_{M_\alpha}(K_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots a-1)$$

die a Charaktere von $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$. Setzt man noch

$$J_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu} K_{\lambda,\mu}, \quad A_{\lambda,\mu} = \mathfrak{N} K'_{\lambda,\mu},$$

wo $N_{\lambda,\mu}$ ein Element von $\mathfrak{N}$, dagegen $K_{\lambda,\mu}$ und $K'_{\lambda,\mu}$ gewisse unter den Elementen $K_0, K_1, \dots K_{a-1}$ bedeuten sollen, so stimmen die Zahlensysteme (8.) und (9.) mit den Zahlensystemen

$$\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N} K'_{\lambda,\mu}),$$

bzw.

$$\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N} K_{\lambda,\mu})$$

überein. Man schließt nun in ganz analoger Weise, wie es auf S. 91 bei der Betrachtung zweier Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}$ geschehen ist, daß sich ein Automorphismus der Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ angeben läßt, der das System der Elemente $\mathfrak{N} K'_{\lambda,\mu}$ von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ in ein Elementensystem $\mathfrak{N} K''_{\lambda,\mu}$ überführt, so daß das Zahlensystem $\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N} K''_{\lambda,\mu})$ für jedes α dem Zahlensystem $\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N} K_{\lambda,\mu})$ assoziiert wird. Es entspricht dann dem System der Elemente $\mathfrak{N} K''_{\lambda,\mu}$ eine durch die Gruppe $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{H}$, welche der Gruppe $\mathfrak{L}$ isomorph ist, und zwar derart, daß zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ ein Isomorphismus erster Art besteht. Ferner entspricht dem System der Elemente

$$(\mathfrak{N} K''_{\lambda,\mu})(\mathfrak{N} K_{\lambda,\mu})^{-1} = B_{\lambda,\mu}$$

eine durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} G_0 + \mathfrak{A} G_1 + \cdots + \mathfrak{A} G_{h-1} \qquad (G_\lambda G_\mu = B_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

von $\mathfrak{H}$, welche die Eigenschaft besitzt, daß ihr Kommutator $\mathfrak{R}'$ kein Element von $\mathfrak{A}$ (außer dem Element E) enthält.

Es mögen nun die Elemente $T_1, T_2, \dots T_k$, bzw. die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_k$ dieselbe Bedeutung haben wie auf S. 94; ferner setze man, falls $T_\lambda = H_\mu$ ist, $G_\mu = T'_\lambda$. Man kann dann durch passende Wahl der Elemente $G_0, G_1, \dots G_{h-1}$ innerhalb der Komplexe $\mathfrak{A} G_0, \mathfrak{A} G_1, \dots \mathfrak{A} G_{h-1}$ erreichen, daß die sämtlichen Elemente $B_{\lambda,\mu}$ als vollständig bestimmt erscheinen, sobald man die k Elemente $B_1, B_2, \dots B_k$ von $\mathfrak{A}$ kennt, die den Bedingungen

$$(\mathfrak{R}' T'_1)^{\varepsilon_1} = B_1 \mathfrak{R}', \quad (\mathfrak{R}' T'_2)^{\varepsilon_2} = B_2 \mathfrak{R}', \dots (\mathfrak{R}' T'_k)^{\varepsilon_k} = B_k \mathfrak{R}'$$

genügen.

Es sei nun etwa

$$B_{\lambda,\mu} = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots B_k^{\beta_k};$$

ferner sei $B_\varkappa = \mathfrak{N} V_\varkappa$ und $B_{\lambda,\mu} = \mathfrak{N} V_{\lambda,\mu}$, wo $V_\varkappa$ und $V_{\lambda,\mu}$ gewisse unter den Elementen $K_0, K_1, \dots K_{a-1}$ bedeuten. Setzt man dann für die auf S. 94 betrachteten Elemente $D_1, D_2, \dots D_k$ von $\mathfrak{M}$ die Elemente $V_1, V_2, \dots V_k$, so bestimmen sich die dort auftretenden Elemente $C_{\lambda,\mu}$ mit Hilfe der $V_\varkappa$ in genau derselben Weise wie die $B_{\lambda,\mu}$ mit Hilfe der $B_\varkappa$, wobei nur zu beachten ist, daß der Exponent $\beta_\varkappa$ modulo der Ordnung des Elementes $B_\varkappa$ von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ reduziert werden kann, diese Ordnung aber nicht mit der Ordnung des Elementes $V_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$ übereinzustimmen braucht. Jedenfalls ergibt sich aber

$$C_{\lambda,\mu} = \bar{N}_{\lambda,\mu} V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \dots V_k^{\beta_k},$$

folglich auch

$$C_{\lambda,\mu} = N'_{\lambda,\mu} V_{\lambda,\mu},$$

wo $\bar{N}_{\lambda,\mu}$ und $N'_{\lambda,\mu}$ Elemente von $\mathfrak{N}$ bedeuten. Man bilde nun das System der Elemente

$$J_{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu} N'_{\lambda,\mu} K_{\lambda,\mu} V_{\lambda,\mu} = N''_{\lambda,\mu} K''_{\lambda,\mu},$$

wo auch $N''_{\lambda,\mu}$ ein Element von $\mathfrak{N}$ bedeutet. Diesem Elementensystem entspricht dann eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{H}$, ferner ist $\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}}$ eine durch die Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, die ebenso wie die Gruppe $\mathfrak{L}'$ durch die Elemente $\mathfrak{N} K''_{\lambda,\mu}$ von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ bestimmt ist. Folglich ist $\mathfrak{L}'$ und also auch $\mathfrak{L}$ der Gruppe $\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}}$ isomorph.

Umgekehrt schließt man leicht, daß, wenn $\mathfrak{K}$ eine beliebige Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ ist, die Gruppe $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{N}}$ eine durch die Gruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ist, deren Kommutator alle Elemente von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ umfaßt.

Wir können daher den Satz aussprechen:

III. *Sind $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \dots$ die verschiedenen Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}$, so erhält man die sämtlichen durch Abelsche Gruppen $\mathfrak{A}$ ergänzten Gruppen von $\mathfrak{H}$, deren Kommutatorgruppen alle Elemente von $\mathfrak{A}$ enthalten, indem man die verschiedenen Untergruppen $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots$ des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ aufsucht und die Gruppen*

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{N}}, \quad \frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}}, \quad \frac{\mathfrak{K}''}{\mathfrak{N}}, \dots$$
$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{N}'}, \quad \frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}'}, \quad \frac{\mathfrak{K}''}{\mathfrak{N}'}, \dots$$
$$\dots\dots\dots$$

bildet.

Aus diesem Satze läßt sich eine für die Anwendungen wichtige Folgerung ziehen.

IV. *Es sei $\mathfrak{L}$ eine durch die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, deren Kommutator alle Elemente von $\mathfrak{A}$ enthält; es sei ferner a die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{A}$ und m' die Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{L}$. Dann ist am' durch die Ordnung m des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ teilbar. Läßt sich insbesondere eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{L}$ angeben, die zugleich eine ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ist, so ist $\mathfrak{D}$ auch eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ und es ist $am' = m$. Ist speziell $\mathfrak{L}$ eine abgeschlossene Gruppe, so ist $\mathfrak{L}$ selbst eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$.*

Ist nämlich r die Ordnung des Kommutators von $\mathfrak{H}$, so besitzt der Kommutator von $\mathfrak{L}$ die Ordnung ar, der Kommutator jeder Darstellungsgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{L}$ die Ordnung $m'ar$. Nun läßt sich aber nach Satz III eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ und eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ angeben, so daß $\mathfrak{L}$ der Gruppe $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{N}}$ isomorph ist. Es ist aber dann $\mathfrak{K}$ eine ergänzte Gruppe von $\mathfrak{L}$, und da der Kommutator von $\mathfrak{K}$ die Ordnung $\frac{m}{a}\cdot ar$ hat, so ist (nach D., Satz II) die Zahl m' durch $\frac{m}{a}$, d. h. $m'a$ durch m teilbar. Ist insbesondere $\mathfrak{D}$ auch eine ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, so ist umgekehrt auch m durch $m'a$ teilbar, also ist $m'a = m$ und folglich ist $\mathfrak{D}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$. Dies tritt speziell ein, wenn $m' = 1$ ist; denn alsdann ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}$, also jedenfalls eine ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$.

§ 3.

In D., § 3, habe ich eine allgemeine Methode zur Bestimmung des Multiplikators und einer Darstellungsgruppe einer vorgeschriebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ angegeben. Diese Methode läßt sich nun, wie jetzt gezeigt werden soll, derart modifizieren, daß sich die erforderlichen Rechnungen in den meisten speziellen Fällen bedeutend einfacher gestalten.

Ich will zunächst die a. a. O. gewonnenen Resultate kurz rekapitulieren.

Es sei wie immer

$$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots h-1)$$

das Kompositionsschema der Gruppe $\mathfrak{H}$. Man führe h erzeugende Elemente

$Q_0, Q_1, \dots Q_{h-1}$ ein und setze fest, daß die h^2 Elemente

$$Q_\lambda\, Q_\mu\, Q^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} = J_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots h-1)$$

mit den h erzeugenden Elementen vertauschbar sein sollen. Die h^3 Gleichungen

$$Q_\nu J_{H_\lambda, H_\mu} = J_{H_\lambda, H_\mu} Q_\nu \qquad (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots h-1)$$

definieren alsdann eine unendliche Gruppe $\mathfrak{K}'$; die Elemente J_{H_λ, H_μ} erzeugen eine unendliche *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{N}'$, die durch das System der h^3 Relationen

$$J_{P,Q} J_{PQ,R} = J_{P,QR} J_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \dots H_{h-1})$$

vollständig definiert erscheint. Die Gruppe $\mathfrak{N}'$ läßt sich dann als das direkte Produkt einer unendlichen *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{N}''$ vom Range h, in der kein Element außer dem Hauptelement E eine endliche Periode besitzt, und einer endlichen Gruppe $\mathfrak{N}$ darstellen. Die Gruppe $\mathfrak{N}$ — die umfassendste in $\mathfrak{N}'$ enthaltene endliche Gruppe — ist dem Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ isomorph und repräsentiert zugleich den größten gemeinsamen Teiler der Untergruppe $\mathfrak{N}'$ und des Kommutators $\mathfrak{T}$ der Gruppe $\mathfrak{K}'$.

Ich nehme nun an, die Gruppe $\mathfrak{H}$ möge sich durch n Elemente

$$S_1 = H_1,\ S_2 = H_2, \dots S_n = H_n$$

erzeugen lassen, für die ein System

$$f_\varkappa(S_\nu) = E \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots q)$$

von q die Gruppe $\mathfrak{H}$ vollständig definierenden Relationen bekannt ist;*) hierbei bedeutet $f_\varkappa(S_\nu)$ ein gewisses Produkt der S_ν mit positiven oder negativen Exponenten.

Bezeichnet man nun die den Elementen $H_1, H_2, \dots H_n$ entsprechenden Elemente $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ von $\mathfrak{K}'$ mit $T_1, T_2, \dots T_n$, so erzeugen diese n Elemente eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}'$, die durch die qn Relationen

$$(10.)\qquad T_\lambda \cdot f_\varkappa(T_\nu) = f_\varkappa(T_\nu) \cdot T_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n;\ \varkappa = 1, 2, \dots q)$$

definiert werden kann.

Die q Elemente

$$J_1 = f_1(T_\nu),\ J_2 = f_2(T_\nu), \dots J_q = f_q(T_\nu)$$

*) Vgl. *Dyck*, Math. Ann., Bd. 20, S. 1.

gehören sämtlich der Untergruppe $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{K}'$ an; sie mögen die Untergruppe $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{G}$ erzeugen. Ist etwa H_λ gleich dem Produkt $g_\lambda(S_\nu)$ der n Elemente S_ν*) und bezeichnet man das Element $g_\lambda(T_\nu)$ von $\mathfrak{G}$ mit G_λ, so lassen sich offenbar die h^2 Elemente

$$G_\lambda G_\mu G^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} = F_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots h-1)$$

als Produkte der $J_\varkappa$ darstellen. Umgekehrt lassen sich auch die Elemente $J_\varkappa$, wie unmittelbar ersichtlich ist, durch die F_{H_λ, H_μ} ausdrücken.

Aus den für die F_{H_λ, H_μ} bestehenden Gleichungen

$$(11.) \qquad F_{P,Q} F_{PQ,R} = F_{P,QR} F_{Q,R}$$

werden sich dann gewisse s unabhängige Gleichungen von der Form

$$(12.) \qquad J_1^{\beta_{\sigma 1}} J_2^{\beta_{\sigma 2}} \dots J_q^{\beta_{\sigma q}} = E \qquad (\sigma = 1, 2, \dots s)$$

ergeben, die den Gleichungen (11.) vollständig äquivalent sind und sich daher als ein System von definierenden Relationen für die durch die $J_\varkappa$ erzeugte *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{B}'$ ansehen lassen.

Nun hat jedes der Elemente Q_λ von $\mathfrak{K}'$ die Form $C_\lambda G_\lambda$, wo C_λ ein gewisses Element von $\mathfrak{N}'$ bedeutet, und speziell die n Elemente $C_1, C_2, \dots C_n$ gleich E zu setzen sind. Es wird dann

$$J_{H_\lambda, H_\mu} = C_\lambda C_\mu C^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} F_{H_\lambda, H_\mu}.$$

Daher läßt sich die Gruppe $\mathfrak{N}'$ durch die $h-n$ Elemente $C_0, C_{n+1}, \dots C_{h-1}$ und die q Elemente $J_1, J_2, \dots J_q$ erzeugen.

Es möge jetzt (vgl. den D., S. 32, zitierten Satz) die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{B}'$ das direkte Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{B}$ und einer unendlichen Gruppe $\mathfrak{B}''$ vom Range k sein, in der kein Element außer dem Hauptelement eine endliche Periode besitzt.

Es kann dann nicht $k < n$ sein, weil sonst die Untergruppe $\mathfrak{N}''$ von $\mathfrak{N}'$ höchstens vom Range $h-n+k < h$ wäre, während wir doch wissen, daß dieser Rang genau gleich h ist. Daß aber k auch nicht größer sein kann als n, also gleich n sein muß, läßt sich etwa folgendermaßen einsehen.

Man setze, wenn $H_\alpha H_\beta H_\gamma \dots = H_\sigma$ ist,

$$G_\alpha G_\beta G_\gamma \dots = F_{H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots} G_\sigma.$$

*) Hierbei soll für $\lambda = 1, 2, \dots n$ das Produkt $g_\lambda(S_\nu)$ gleich S_λ sein.

Dann ist das Element $F_{H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \ldots}$ ein gewisses Produkt der F_{H_λ, H_μ}, und zwar ergibt sich aus dem assoziativen Gesetz für irgend welche p Elemente $A, B, \ldots N, P$ von $\mathfrak{H}$ die Beziehung

(13.) $$F_{A, B, \ldots N, P} = F_{A, B, \ldots N} F_{A, B, \ldots N, P},$$

die zur Berechnung der $F_{H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \ldots}$ dienen kann. Bezeichnet man nun das Produkt

$$\prod_R F_{P, R} \qquad (R = H_0, H_1, \ldots H_{h-1})$$

mit F_P, so ist, wie ich zeigen will,

(14.) $$F^h_{A, B, \ldots N, P} = F_A F_B \ldots F_N F_P F^{-1}_{AB \ldots NP}.$$

Für zwei Elemente A, B folgt dies nämlich leicht direkt aus (11.), indem man $P = A$, $Q = B$ setzt und auf beiden Seiten das Produkt über alle Elemente R von $\mathfrak{H}$ bildet. Es möge daher die Formel (14.) für weniger als p Elemente bereits als richtig gelten. Dann folgt aber aus (13.)

$$\begin{aligned} F^h_{A, B, \ldots N, P} &= F^h_{A, B, \ldots N} F^h_{AB \ldots N, P} \\ &= F_A F_B \ldots F_N F^{-1}_{AB \ldots N} F_{AB \ldots N} F_P F^{-1}_{AB \ldots NP}. \end{aligned}$$

Dies ist aber die zu beweisende Formel (14.).

Nun soll aber $G_\lambda = g_\lambda(T_\nu)$ sein. Ist daher $g_\lambda(T_\nu) = T_\alpha T_\beta T_\gamma \ldots$, so ist also

$$F_{S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, \ldots} = E;$$

folglich ist wegen (14.)

(15.) $$F_{S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots} = F_{H_\lambda} = F_{S_\alpha} F_{S_\beta} F_{S_\gamma} \ldots.$$

Daher läßt sich jedes der Elemente F_{H_λ} durch die n Elemente $F_{S_1}, F_{S_2}, \ldots F_{S_n}$ ausdrücken. Aus (14.) folgt aber dann, daß sich auch die h-ten Potenzen aller $F_{A, B}$ und also auch aller Elemente von $\mathfrak{B}'$ als Produkte von Potenzen der n Elemente F_{S_ν} darstellen lassen, was offenbar für $k > n$ nicht möglich wäre.

Daher ist der Rang k der Gruppe $\mathfrak{B}''$ genau gleich n.*)

Es ist ferner leicht einzusehen, daß die Gruppe $\mathfrak{B}$, die als die umfassendste in $\mathfrak{B}'$ enthaltene endliche Gruppe definiert werden kann, gleich $\mathfrak{R}$ ist.

*) Zugleich ergibt sich, daß die n Elemente F_{S_ν} von einander abhängig sind und keine endliche Periode besitzen.

Da nämlich jedes Kommutatorelement von $\mathfrak{K}'$ die Form $Q_\lambda Q_\mu Q_\lambda^{-1} Q_\mu^{-1}$ hat und dieses Element auch gleich $G_\lambda G_\mu G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1}$ ist, so ist der Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}'$ zugleich auch der Kommutator von $\mathfrak{G}$. Nun enthält aber $\mathfrak{T}$ die ganze endliche Gruppe $\mathfrak{N}$. Folglich ist $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}'$ und also auch von $\mathfrak{B}$; da andererseits $\mathfrak{B}$ als eine endliche Untergruppe von $\mathfrak{N}'$ auch in $\mathfrak{N}$ enthalten sein muß, so ist in der Tat $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$.

Wir schließen hieraus, da $\mathfrak{N}$ dem Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ isomorph ist, daß das System $(\beta_{\sigma\varkappa})$ der Exponenten von (12.) genau vom Range $q-n$ ist, ferner daß diejenigen Elementarteiler dieses Systems, die größer sind als 1, mit den Invarianten $e_1, e_2, \dots e_l$ der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{M}$ übereinstimmen. Insbesondere ist $m = e_1 e_2 \dots e_l$ der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten $(q-n)$-ten Grades des Systems $(\beta_{\sigma\varkappa})$.

Aus diesem Resultat ergibt sich noch eine für die Anwendungen nützliche Bemerkung.

Da die Relationen (12.) die Untergruppe $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{G}$ vollständig definieren, so muß sich jede aus den Gleichungen (10.) resultierende Beziehung zwischen den Elementen $J_\varkappa = f_\varkappa(T_\nu)$ auch aus den Gleichungen (12.), d. h. durch Potenzieren und Multiplizieren dieser Gleichungen, ableiten lassen; oder, genauer gesprochen: ergibt sich eine Gleichung

$$J_1^{\gamma_1} J_2^{\gamma_2} \dots J_q^{\gamma_q} = E,$$

so muß

$$\gamma_\varkappa = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \beta_{\sigma\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots q)$$

sein, wo die a_σ gewisse ganze Zahlen bedeuten. Hat man daher aus den Gleichungen (10.) auf irgend einem Wege s' Relationen der Form

$$J_1^{\gamma_{\sigma 1}} J_2^{\gamma_{\sigma 2}} \dots J_q^{\gamma_{\sigma q}} = E \qquad (\sigma = 1, 2, \dots s')$$

gewonnen, so müssen die Elementarteiler des Systems $(\gamma_{\sigma\varkappa})$ nach einem bekannten Satze über Systeme mit ganzzahligen Koeffizienten*) durch die entsprechenden Elementarteiler $e_1, e_2, \dots e_l$ des Systems $(\beta_{\sigma\varkappa})$ teilbar sein. Ist insbesondere der Rang von $(\gamma_{\sigma\varkappa})$ gleich $q-n$, so ist der größte gemeinsame Teiler $\overline{m}$ aller Unterdeterminanten des Grades $q-n$ von $(\gamma_{\sigma\varkappa})$ durch m teilbar. Man erhält auf diese Weise eine obere Grenze für die gesuchte Zahl m.

*) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 88, S. 96, und Sitzungsber. der Berl. Akad., 1894, S. 31; ferner *Hensel*, dieses Journal Bd. 114, S. 109.

Man wird in vielen Fällen mit Erfolg noch anders verfahren können.

Man unterwerfe, wenn $s_1, s_2, \dots s_n$ die Ordnungen der Elemente $S_1, S_2, \dots S_n$ von $\mathfrak{H}$ sind, die n die Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugenden Elemente $T_1, T_2, \dots T_n$ noch den n Bedingungen

$$(16.)\qquad T_1^{s_1} = E, \quad T_2^{s_2} = E, \dots T_n^{s_n} = E.$$

Die durch die Gleichungen (10.) und (16.) definierte Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist dann, wie ich zeigen will, eine endliche Gruppe.

Es sei nämlich $\mathfrak{S}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und es sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}A_0 + \mathfrak{S}A_1 + \cdots + \mathfrak{S}A_{t-1}.$$

Dann ergibt sich, wenn P ein Element von $\mathfrak{S}$ ist, aus der Gleichung

$$F_{P,Q} F_{PQ,A_i} = F_{P,QA_i} F_{Q,A_i},$$

indem man auf beiden Seiten das Produkt über alle Elemente Q von $\mathfrak{S}$ bildet,

$$\prod_Q F_{P,Q} \cdot \prod_Q F_{PQ,A_i} = \prod_Q F_{P,QA_i} \cdot \prod_Q F_{Q,A_i}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\prod_Q F_{PQ,A_i} = \prod_Q F_{Q,A_i};$$

folglich ist

$$\prod_Q F_{P,Q} = \prod_Q F_{P,QA_i},$$

und daraus ergibt sich

$$F_P = \prod_R F_{P,R} = \{ \prod_Q F_{P,Q} \}^t. \qquad (R = H_0, H_1, \dots H_{h-1})$$

Wendet man dies auf die aus den Potenzen von S_ν bestehende zyklische Gruppe $\mathfrak{S}$ an, so erhält man

$$F_{S_\nu} = F'^{\frac{h}{s_\nu}}_{S_\nu},$$

wo

$$F'_{S_\nu} = \prod_{\sigma=0}^{s_\nu - 1} F_{S_\nu, S_\nu^\sigma}$$

zu setzen ist. Fügt man nun zu den Gleichungen (10.) noch die Gleichungen (16.) oder, was offenbar dasselbe ist, die Gleichungen

$$F'_{S_\nu} = E$$

hinzu, so wird auch $F_{S_\nu} = E$; daraus folgt aber wegen (14.) und (15.), daß

die h-ten Potenzen aller $F_{A,B}$ und also auch aller q Elemente $J_\varkappa$ gleich E werden. Dies besagt aber, daß die Gruppe $\mathfrak{G}'$ in der Tat eine endliche Gruppe ist, und zwar eine Gruppe, deren Ordnung keinen zu h teilerfremden Primfaktor enthält.

Ich will nun zeigen, daß der Kommutator von $\mathfrak{G}'$ genau von der Ordnung mr ist, falls r wie früher die Ordnung des Kommutators von $\mathfrak{H}$ bedeutet.

Es mögen nämlich die Elemente $F'_{S_1}, F'_{S_2}, \dots F'_{S_n}$ von $\mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ erzeugen. Dann ist offenbar $\mathfrak{G}'$ der Gruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}}$ isomorph, die durch die verschiedenen unter den Komplexen $\mathfrak{F}R$ gebildet wird, falls R alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft. Nun besitzt aber kein Element von $\mathfrak{F}$ (außer E) eine endliche Periode; denn wäre dies der Fall, so würde sich wegen $F_{S_\nu} = F'^{\frac{h}{s_\nu}}_{S_\nu}$ eine Bedingungsgleichung für die n Elemente F_{S_ν} ergeben, was, wie wir auf S. 103 gesehen haben, nicht möglich ist. Daher ist $\mathfrak{F}$ zu der Gruppe $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ und also auch zu dem Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$ teilerfremd. Sind nun

$$R_0, R_1, \dots R_{mr-1}$$

die Elemente der Gruppe $\mathfrak{T}$, so sind die Komplexe

$$\mathfrak{F}R_0, \mathfrak{F}R_1, \dots \mathfrak{F}R_{mr-1}$$

von einander verschieden. Diese Komplexe bilden aber offenbar den Kommutator von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}}$. Daher ist auch die Ordnung des Kommutators von $\mathfrak{G}'$ gleich mr.*)

Es gelingt nun vielfach, die Ordnung und die Konstitution der Gruppe $\mathfrak{G}'$ direkt aus den sie definierenden Relationen zu ermitteln. Man erhält dann den Multiplikator von $\mathfrak{H}$ als den größten gemeinsamen Teiler des Kommutators von $\mathfrak{G}'$ und der durch die Elemente $J_\varkappa = f_\varkappa(T_\nu)$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{A}$. Hierbei ist noch zu bemerken, daß, wenn $A_1, A_2, \dots A_n$ irgend welche Elemente von $\mathfrak{A}$ sind, es auch genügt, an Stelle der Gruppe $\mathfrak{G}'$ die

*) Leichter läßt sich das einsehen, indem man zeigt, daß $\mathfrak{G}'$ eine *hinreichend* ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ist (vgl. D., S. 23 und S. 31), d. h. daß man durch Betrachtung der Darstellungen von $\mathfrak{G}'$ durch ganze lineare Substitutionen die sämtlichen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen erhält.

durch die Elemente $A_1 T_1, A_2 T_2, \dots A_n T_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ zu betrachten. Denn offenbar stimmt der Kommutator dieser Untergruppe mit dem Kommutator von $\mathfrak{G}'$ überein.

§ 4.

Zur Illustration der im vorigen Paragraphen entwickelten Methoden mögen folgende Beispiele dienen:

1. $\mathfrak{H}$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung h. — Eine solche ist durch eine einzige Gleichung $S^h = E$ definiert. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist durch die Gleichung $T^h = E$ zu definieren und stimmt also mit $\mathfrak{H}$ überein. Es ist hier daher $m = 1$ (vgl. auch D., S. 50).

2. Ich betrachte ferner die durch die Gleichungen

$$(17.) \qquad S_1^{2^t} = E, \quad S_2^2 = S_1^{2^{t-1}}, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1^{-1} \qquad (t \geqq 2)$$

definierte Gruppe $\mathfrak{Q}_{t+1}$ der Ordnung 2^{t+1}. — Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann zu definieren durch

$$T_1^{2^t} = J_1, \quad T_2^2 = J_2 T_1^{2^{t-1}}, \quad T_2^{-1} T_1 T_2 = J_3 T_1^{-1},$$

wo J_1, J_2, J_3 mit T_1 und T_2 vertauschbar sein sollen. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt, daß $T_1^{2^{t-1}}$ mit T_2 vertauschbar ist. Erhebt man daher beide Seiten der letzten Gleichung zur 2^{t-1}-ten Potenz, so ergibt sich

$$T_1^{2^{t-1}} = J_3^{2^{t-1}} T_1^{-2^{t-1}}$$

oder

$$(18.) \qquad J_1^{-1} J_3^{2^{t-1}} = E.$$

Die oben betrachtete Zahl $q - n$ ist hier aber gleich $3 - 2 = 1$, ferner ist der größte gemeinsame Teiler der Exponenten in der Gleichung (18.) gleich 1. Daher ist auch in diesem Falle $m = 1$.

Die hier betrachtete Gruppe der Ordnung 2^{t+1} ist dadurch charakterisiert, daß sie nur ein Element der Ordnung 2 enthält und keine zyklische Gruppe ist.*) Man bezeichnet sie passend als die Gruppe der Ordnung 2^{t+1} vom Quaternionentypus. Diese Gruppe ist also eine abgeschlossene Gruppe.

*) Vgl. *Burnside*, Theory of Groups of finite Order, § 63.

3. Eine abgeschlossene Gruppe ist auch die durch die Gleichungen

(19.) $$S_1^{2^t} = E, \quad S_2^2 = E, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1^{-1+2^{t-1}} \qquad (t \geqq 3)$$

definierte Gruppe $\mathfrak{Q}'_{t+1}$ der Ordnung 2^{t+1}.*) Denn die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist hier zu definieren durch

$$T_1^{2^t} = J_1, \quad T_2^2 = J_2, \quad T_2^{-1} T_1 T_2 = J_3 T_1^{-1+2^{t-1}},$$

wo die $J_\varkappa$ wieder mit T_1 und T_2 vertauschbar sein sollen. Aus der letzten Gleichung folgt

$$T_2^{-2} T_1 T_2^2 = T_1 = J_3 \cdot J_3^{-1+2^{t-1}} T_1^{(-1+2^{t-1})^2} = J_3^{2^{t-1}} J_1^{-1+2^{t-2}} T_1,$$

also

$$J_1^{-1+2^{t-2}} J_3^{2^{t-1}} = E.$$

Da auch hier $q - n = 1$ ist, ferner wegen $t \geqq 3$ der größte gemeinsame Teiler der Exponenten in der eben gewonnenen Gleichung gleich 1 ist, so ist in der Tat $m = 1$.

Aus den unter 1., 2. und 3. erhaltenen Ergebnissen folgt in Verbindung mit dem Satz X meiner früheren Arbeit:

V. *Ist p^a die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung h der Gruppe $\mathfrak{H}$ aufgeht, und sind die Untergruppen der Ordnung p^a von $\mathfrak{H}$ entweder zyklische Gruppen oder auch, wenn $p = 2$ ist, vom Typus 2. oder 3., so ist die Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ nicht durch p teilbar.***)

4. Es sei nun $\mathfrak{D}_t$ die Diedergruppe der Ordnung $2^t (t \geqq 3)$, d. h. die durch die Gleichungen

$$P_1^{2^{t-1}} = E, \; P_2^2 = E, \; P_2^{-1} P_1 P_2 = P_1^{-1}$$

definierte Gruppe. — Der Multiplikator und die Darstellungsgruppen dieser Gruppe können durch folgende Überlegungen bestimmt werden. Man betrachte nämlich die durch die Gleichungen (17.) definierte Gruppe $\mathfrak{Q}_{t+1}$ der

*) Vgl. *Burnside*, a. a. O., § 65.

**) Ich will noch auf eine andere Klasse von Gruppen von Primzahlpotenzordnung hinweisen, die abgeschlossene Gruppen sind. Es sind dies die durch die Gleichungen

$$P^{p^\mu} = E, \quad Q^{p^\nu} = E, \quad Q^{-1} P Q = P^{1+p^{\mu-\nu}}$$

definierten Gruppen der Ordnung $p^{\mu+\nu}$ (vgl. *Burnside*, a. a. O., § 67). Hierbei kann ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten, während μ für $p > 2$ größer als ν, für $p = 2$ größer als $\nu + 1$ sein muß.

Ordnung 2^{t+1}. Das Element $S_1^{2^{t-1}} = M$ dieser Gruppe ist ein invariantes Element, ferner ist M eine Potenz des Kommutatorelementes $S_2^{-1} S_1 S_2 S_1^{-1} = S_1^{-2}$, also in dem Kommutator von $\mathfrak{Q}_{t+1}$ enthalten. Bezeichnet man nun die Gruppe $E + M$ mit $\mathfrak{M}$, so ist $\frac{\mathfrak{Q}_{t+1}}{\mathfrak{M}}$ der Gruppe $\mathfrak{D}_t$ isomorph. Da aber $\mathfrak{Q}_{t+1}$ eine abgeschlossene Gruppe ist, so ergibt sich nach Satz IV unmittelbar, daß $\mathfrak{Q}_{t+1}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{D}_t$ ist. Daher ist auch $\mathfrak{M}$ der Multiplikator von $\mathfrak{D}_t$, also ist für die Diedergruppe $m = 2$. Ebenso wie $\mathfrak{Q}_{t+1}$ sind ferner auch die Gruppen $\mathfrak{Q}'_{t+1}$ und $\mathfrak{D}_{t+1}$ Darstellungsgruppen von $\mathfrak{D}_t$. Andere Darstellungsgruppen besitzt aber die Diedergruppe $\mathfrak{D}_t$ nicht. Der Kommutator $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{D}_t$ ist nämlich die durch das Element P_1^2 erzeugte Gruppe der Ordnung 2^{t-2}, ferner ist $\frac{\mathfrak{D}_t}{\mathfrak{K}}$ eine *Abel*sche Gruppe, deren Invarianten $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 2$ sind. Daher ist hier (wegen $m = 2$) die in § 1 betrachtete Zahl n gleich 4. Stellt man aber nach dem dort angegebenen Verfahren, etwa von der Gruppe $\mathfrak{Q}_{t+1}$ ausgehend, die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{D}_t$ auf, so ergibt sich außer den drei Gruppen $\mathfrak{Q}_{t+1}$, $\mathfrak{Q}'_{t+1}$ und $\mathfrak{D}_{t+1}$ noch als vierte die durch die Gleichungen

$$R_1^{2^t} = E, \quad R_2^2 = R_1^{2^{t-1}}, \quad R_2^{-1} R_1 R_2 = R_1^{-1+2^{t-1}}$$

zu definierende Gruppe. Setzt man aber $S_1 = R_1$, $S_2 = R_1 R_2$, so genügen diese Elemente den Gleichungen (19.); daher ist die neu hinzukommende Gruppe der Gruppe $\mathfrak{Q}'_{t+1}$ isomorph.

5. Um eine weitere Anwendung unserer allgemeinen Resultate zu geben, will ich diejenigen Gruppen behandeln, die sich als direkte Produkte zweier oder mehrerer Gruppen darstellen lassen. — Ich beweise zunächst folgenden Satz:

VI. *Es seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ zwei endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppen mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$, und deren Multiplikatorgruppen mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ bezeichnet werden mögen. Ferner seien die Abelschen Gruppen $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{K}}$ und $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{S}}$ die direkten Produkte zyklischer Gruppen der Ordnungen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ und $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_l$. Dann ist der Multiplikator der Gruppe $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und der kl zyklischen Gruppen der Ordnungen*

$$(\eta_1, \zeta_1), \ (\eta_1, \zeta_2), \dots (\eta_2, \zeta_1), \ (\eta_2, \zeta_2), \dots (\eta_k, \zeta_l).$$

Hier bedeutet das Zeichen $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ und das Zeichen $(\eta_\varkappa, \zeta_\lambda)$ wie früher den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $\eta_\varkappa$ und ζ_λ.

Es sei nämlich

$$\mathfrak{V} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{r-1},$$
$$\mathfrak{W} = W_0 + W_1 + \cdots + W_{s-1},$$

ferner sei

(20.) $$V_\varkappa V_\lambda = V_{\varphi(\varkappa,\lambda)}, \quad W_\varrho W_\sigma = W_{\psi(\varrho,\sigma)}, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa,\lambda = 0,1,\dots r-1\\ \varrho,\sigma = 0,1,\dots s-1\end{smallmatrix}\right)$$

wo $\varphi(\varkappa, \lambda)$ und $\psi(\varrho, \sigma)$ gewisse Indizes der Reihe $0, 1, \dots r-1$, bzw. $0, 1, \dots s-1$ bedeuten.

Die Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ kann dann durch die Gleichungen (20.) und die rs Relationen

$$W_\varrho V_\varkappa = V_\varkappa W_\varrho \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots r-1,\ \varrho = 0, 1, \dots s-1)$$

definiert werden. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ des vorigen Paragraphen ist dann zu definieren durch die Gleichungen

(21.) $$X_\varkappa X_\lambda = K_{\varkappa,\lambda} X_{\varphi(\varkappa,\lambda)},$$
(22.) $$Y_\varrho Y_\sigma = L_{\varrho,\sigma} Y_{\psi(\varrho,\sigma)}, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa,\lambda = 0,1,\dots r-1\\ \varrho,\sigma = 0,1,\dots s-1\end{smallmatrix}\right)$$
(23.) $$Y_\varrho X_\varkappa = J_{\varkappa,\varrho} X_\varkappa Y_\varrho,$$

wo die Elemente $K_{\varkappa,\lambda}$, $L_{\varrho,\sigma}$ und $J_{\varkappa,\varrho}$ mit den erzeugenden Elementen $X_\varkappa$ und Y_ϱ vertauschbar sein sollen. Schreibt man noch ausführlicher

$$K_{\varkappa,\lambda} = K_{V_\varkappa, V_\lambda}, \quad L_{\varrho,\sigma} = L_{W_\varrho, W_\sigma}, \quad J_{\varkappa,\varrho} = J_{V_\varkappa, W_\varrho},$$

so ergeben sich zunächst aus (21.) und (22.) auf Grund des assoziativen Gesetzes die Relationen

(24.) $$K_{A,B} K_{AB,C} = K_{A,BC} K_{B,C}, \qquad (A, B, C = V_0, V_1, \dots V_{r-1})$$
(25.) $$L_{P,Q}\, L_{PQ,R} = L_{P,QR} L_{Q,R}. \qquad (P, Q, R = W_0, W_1, \dots W_{s-1})$$

Ferner erhält man aus (23.), wie eine leichte Rechnung zeigt, die Gleichungen

(26.) $$J_{A,P} J_{B,P} = J_{AB,P},$$
(27.) $$J_{A,P} J_{A,Q} = J_{A,PQ}.$$

Bezeichnet man nun das Element $X_\varkappa Y_\varrho$ mit $G_{\varkappa,\varrho}$, so wird

$$G_{\varkappa,\varrho} G_{\lambda,\sigma} = F_{\varkappa,\lambda,\varrho,\sigma}\, G_{\varphi(\varkappa,\lambda),\psi(\varrho,\sigma)},$$

wo

$$F_{\varkappa,\lambda,\varrho,\sigma} = K_{\varkappa,\lambda} L_{\varrho,\sigma} J_{\lambda,\varrho}$$

zu setzen ist.

Man überzeugt sich nun leicht, daß für diese Elemente die sämtlichen $(rs)^3$ aus dem assoziativen Gesetz hervorgehenden (den Gleichungen (11.) entsprechenden) Bedingungen erfüllt sind, sofern die Elemente

$$(28.) \qquad K_{A,B}, \quad L_{P,Q}, \quad J_{A,P}$$

den Gleichungen (24.) bis (27.) genügen. Daher ist die durch die Elemente (28.) erzeugte *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{B}'$ durch die Gleichungen (24.) bis (27.) vollständig definiert. Erzeugen nun die Elemente $K_{A,B}$ die Gruppe $\mathfrak{C}'$, die Elemente $L_{P,Q}$ die Gruppe $\mathfrak{D}'$, endlich die Elemente $J_{A,P}$ die Gruppe $\mathfrak{J}$, so ist $\mathfrak{B}'$ offenbar das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{J}$. Ferner ist die umfassendste in $\mathfrak{B}'$ enthaltene endliche Gruppe $\mathfrak{B}$ das direkte Produkt der größten in $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{J}$ enthaltenen endlichen Gruppen. Die beiden ersteren sind nun, wie aus dem früheren folgt, den Multiplikatorgruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ isomorph und mögen selbst mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ bezeichnet werden.

Die Gruppe $\mathfrak{J}$ ist aber, wie ich zeigen will, selbst eine endliche Gruppe, die als das direkte Produkt der kl zyklischen Gruppen der Ordnungen $(\eta_\varkappa, \zeta_\lambda)$ anzusehen ist.

In der Tat besagen die Gleichungen (26.), daß die r unter einander vertauschbaren Elemente

$$J_{A,P} \qquad (A = V_0, V_1, \ldots V_{r-1})$$

für jedes P eine der Gruppe $\mathfrak{V}$ (ein- oder mehrstufig) isomorphe Gruppe bilden. Daraus folgt sofort, daß $J_{A,P} = E$ ist, sobald A dem Kommutator $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{V}$ angehört, und daß $J_{A,P} = J_{B,P}$ ist, falls A und B mod. $\mathfrak{R}$ kongruent sind. Ebenso ergibt sich aus (27.), daß für jedes A die Gleichung $J_{A,P} = E$ gilt, wenn P dem Kommutator $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{W}$ angehört, und daß $J_{A,P} = J_{A,Q}$ ist, falls PQ^{-1} in $\mathfrak{S}$ vorkommt. Es sei nun

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{R}C_0 + \mathfrak{R}C_1 + \cdots + \mathfrak{R}C_{a-1},$$
$$\mathfrak{W} = \mathfrak{S}D_0 + \mathfrak{S}D_1 + \cdots + \mathfrak{S}D_{b-1}.$$

Man setze dann noch $\mathfrak{R}C_\alpha = R_\alpha$, $\mathfrak{S}D_\beta = S_\beta$ und

$$J_{C_\alpha, D_\beta} = J_{R_\alpha, S_\beta}.$$

Dann wird offenbar $J_{A,P} = J_{R_\alpha, S_\beta}$, falls A dem Komplex R_α und P dem Komplex S_β angehört. Ferner reduzieren sich die Gleichungen (26.) und (27.)

auf die Gleichungen

(29.) $$J_{R,S} J_{R',S} = J_{RR',S}, \qquad (R, R' = R_0, R_1, \dots R_{a-1})$$

(30.) $$J_{R,S} J_{R,S'} = J_{R,SS'}. \qquad (S, S' = S_0, S_1, \dots S_{b-1})$$

Es mögen nun die Komplexe $R_1, R_2, \dots R_k$ eine Basis der *Abel*schen Gruppe $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{R}}$, die Komplexe $S_1, S_2, \dots S_l$ eine Basis der Gruppe $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{S}}$ bilden, und zwar sei hierbei $\eta_\varkappa$ die Ordnung von $R_\varkappa$ und ζ_λ die Ordnung von S_λ. Dann folgt aus (29.) und (30.), daß die ab Elemente $J_{R,S}$ sich als Produkte der kl Elemente $J_{\varkappa,\lambda} = J_{R_\varkappa, S_\lambda}$ darstellen lassen, ferner erhält man

$$J_{\varkappa,\lambda}^{\eta_\varkappa} = E, \qquad J_{\varkappa,\lambda}^{\zeta_\lambda} = E,$$

also

(31.) $$J_{\varkappa,\lambda}^{(\eta_\varkappa, \zeta_\lambda)} = E.$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß, wenn diese Gleichungen bestehen, auch die allgemeineren Beziehungen (29.) und (30.) sämtlich erfüllt sind. Daher kann die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{J}$ durch die Gleichungen (31.) definiert werden und ist demnach in der Tat das direkte Produkt der kl zyklischen Gruppen der Ordnungen $(\eta_\varkappa, \zeta_\lambda)$.

Da nun das direkte Produkt $\mathfrak{B}$ der Gruppen $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{J}$ dem Multiplikator von $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ isomorph ist, so ist unser Satz bewiesen.

Kennt man zwei Darstellungsgruppen von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$, so ist es auch leicht, eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ anzugeben. Sind nämlich

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{C} V'_0 + \mathfrak{C} V'_1 + \cdots + \mathfrak{C} V'_{r-1}$$

und

$$\mathfrak{W}' = \mathfrak{D} W'_0 + \mathfrak{D} W'_1 + \cdots + \mathfrak{D} W'_{s-1}$$

Darstellungsgruppen von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$, so erzeugen die $r+s$ Elemente $V'_0, \dots V'_{r-1}$, $W'_0, \dots W'_{s-1}$, falls festgesetzt wird, daß die rs Elemente

$$W'_\varrho V'_\varkappa W'^{-1}_\varrho V'^{-1}_\varkappa = J_{\varkappa,\lambda}$$

mit den $r+s$ erzeugenden Elementen vertauschbar sein sollen, eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.

Beachtet man noch, daß der Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, ferner daß die Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{T}}$ das direkte Produkt der Gruppen $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{R}}$ und $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{S}}$ ist, so folgert man leicht aus unserem Satz VI durch den Schluß von n auf $n+1$ den allgemeineren Satz:

VII. *Es sei $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt der n Gruppen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots \mathfrak{H}_n$. Es möge $\mathfrak{R}_\nu$ der Kommutator, $\mathfrak{M}_\nu$ der Multiplikator der Gruppe $\mathfrak{H}_\nu$ sein: ferner sei die Abelsche Gruppe $\frac{\mathfrak{H}_\nu}{\mathfrak{R}_\nu}$ das direkte Produkt von k_ν zyklischen Gruppen der Ordnungen $\varepsilon_{\nu 1}, \varepsilon_{\nu 2}, \ldots \varepsilon_{\nu k_\nu}$. Dann ist der Multiplikator von $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$ und der $\sum\limits_{\mu<\nu} k_\mu k_\nu$ zyklischen Gruppen der Ordnungen*

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}), \ (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}), \ldots (\varepsilon_{1k_1}, \varepsilon_{nk_n}), \ (\varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}), \ldots (\varepsilon_{n-1, k_{n-1}}, \varepsilon_{n, k_n}).$$

Für *Abel*sche Gruppen ergibt sich hieraus unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jede zyklische Gruppe eine abgeschlossene Gruppe ist:

VIII. *Ist $\mathfrak{H}$ eine Abelsche Gruppe und sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Ordnungen der Elemente irgend einer Basis von $\mathfrak{H}$, so ist der Multiplikator von $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt von $\binom{n}{2}$ zyklischen Gruppen der Ordnungen*

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \ (\varepsilon_1, \varepsilon_3), \ldots (\varepsilon_1, \varepsilon_n), \ (\varepsilon_2, \varepsilon_3), \ldots (\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n).$$

Sind also

$$p^{\alpha_1}, \ p^{\alpha_2}, \ldots p^{\alpha_k}, \qquad (\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots > \alpha_k)$$
$$q^{\beta_1}, \ q^{\beta_2}, \ldots q^{\beta_l}, \qquad (\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_l)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdots \ \cdot$$

die Primzahlinvarianten einer *Abel*schen Gruppe, so ist die Ordnung ihres Multiplikators gleich

$$p^{\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + (k-1)\alpha_k} \cdot q^{\beta_2 + 2\beta_3 + \cdots + (l-1)\beta_l} \ldots,$$

die Ordnung jeder ihrer Darstellungsgruppen also gleich

$$p^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k} \cdot q^{\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + l\beta_l} \ldots .$$

§ 5.

Mit Hilfe der im vorigen entwickelten Sätze gelingt es nun verhältnismäßig leicht, die Darstellungsgruppen der Gruppen binärer linearer Substitutionen, deren Koeffizienten Größen eines beliebigen *Galois*schen Feldes*) sind, genau zu berechnen.

Es sei p^n die Ordnung des gegebenen *Galois*schen Feldes, das ich nach dem Vorgange des Herrn *Dickson* mit $GF[p^n]$ bezeichnen will.

*) Vgl. *Dickson*, Linear Groups with an Exposition of the *Galois* Field Theory, Leipzig, 1901.

Es werden hier folgende drei Gruppen untersucht werden:

1. Die Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$, die durch die gebrochenen linearen Substitutionen $\xi = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ gebildet wird, deren Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma$ gleich 1 ist. — Die Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ ist für $p=2$ von der Ordnung $2^n(2^{2n}-1)$, für eine ungerade Primzahl p von der Ordnung $\frac{p^n(p^{2n}-1)}{2}$ und ist für $p^n > 3$ eine einfache Gruppe.

2. Die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$, die durch die ganzen linearen Substitutionen

$$\xi_1 = \alpha\eta_1+\beta\eta_2, \quad \xi_2 = \gamma\eta_1+\delta\eta_2$$

gebildet wird, deren Determinante gleich 1 ist. — Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ ist gleich $p^n(p^{2n}-1)$. Ist $p=2$, so ist $\mathfrak{L}_{p^n}$ der Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ isomorph. Es genügt daher, die Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ nur für den Fall $p>2$ zu betrachten.

3. Die Gruppe $\mathfrak{H}_{p^n}$ der gebrochenen linearen Substitutionen $\xi = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ von nicht verschwindender Determinante. — Die Ordnung dieser Gruppe ist gleich $p^n(p^{2n}-1)$. Für $p=2$ ist ferner $\mathfrak{H}_{p^n}$ der Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ isomorph; es soll daher auch $\mathfrak{H}_{p^n}$ nur für den Fall $p>2$ betrachtet werden.

Ehe ich an die Bestimmung der Darstellungsgruppen dieser drei Gruppen gehe, schicke ich noch eine Hilfsbetrachtung voraus.

Es sei allgemein $\mathfrak{H}$ eine Gruppe der Ordnung h, ferner sei p eine Primzahl und $h=p^n r$, wo $n>0$ und r zu p teilerfremd sein soll. Ich nehme an, die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Gruppen der Ordnung p^n seien *Abel*sche Gruppen. Man bezeichne, wenn $\mathfrak{P}$ eine dieser Gruppen ist, die Elemente einer Basis von $\mathfrak{P}$ mit $P_0, P_1, \dots P_{k-1}$.

Es sei nun A ein mit der Gruppe $\mathfrak{P}$ vertauschbares Element von $\mathfrak{H}$, so daß für jedes Element P von $\mathfrak{P}$ auch das Element $A^{-1}PA = P'$ in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Der Automorphismus $\binom{P}{P'}$ von $\mathfrak{P}$ ist dann vollständig bestimmt, wenn die k Elemente

$$P'_\varrho = A^{-1}P_\varrho A = P_0^{a_{\varrho 0}} P_1^{a_{\varrho 1}} \dots P_{k-1}^{a_{\varrho\, k-1}} \qquad (\varrho = 0, 1, \dots k-1)$$

bekannt sind. Ich will nun zeigen: *soll die Ordnung m des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ durch p teilbar sein können, so muß die Bedingungskongruenz*

$$(32.) \qquad |a_{\varrho\sigma} - x\delta_{\varrho\sigma}| \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\delta_{\varrho\varrho}=1,\ \delta_{\varrho\sigma}=0 \text{ für } \varrho \neq \sigma)$$

*ein Paar reziproker Wurzeln besitzen.**)

*) Die Wurzeln der Kongruenz (32.) können etwa als Größen des *Galois*schen Feldes $GF[p^{k}]$ aufgefaßt werden.

Es sei nämlich $\mathfrak{K}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$. Es möge dem Element R von $\mathfrak{H}$ der Komplex $\mathfrak{M}K_R$ der mit $\mathfrak{H}$ isomorphen Gruppe $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ entsprechen. Durchläuft dann P die p^n Elemente von $\mathfrak{P}$, so bilden die in den Komplexen $\mathfrak{M}K_P$ enthaltenen $p^n m$ Elemente eine Untergruppe $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{K}$, die als eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{P}$ anzusehen ist. Der Kommutator $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{P}'$ wird dann durch die p^{2n} Elemente

$$K_P K_Q K_P^{-1} K_Q^{-1} = J_{P,Q}$$

erzeugt, wo P und Q die sämtlichen Elemente von $\mathfrak{P}$ durchlaufen. Hierbei gehört, da ja $PQP^{-1}Q^{-1}=E$ ist, das Element $J_{P,Q}$ der Untergruppe $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{P}'$ an. Aus den Gleichungen

$$K_P K_Q = J_{P,Q} K_Q K_P$$

erhält man nun für die $J_{P,Q}$ ohne Mühe folgende Beziehungen:

(33.) $$J_{P,Q} J_{Q,P} = E,$$

(34.) $$J_{P,Q} J_{P,R} = J_{P,QR},$$

(35.) $$J_{P',Q'} = J_{P,Q}.$$

Hierbei bedeutet auch R ein beliebiges Element von $\mathfrak{P}$. — Aus den Gleichungen (33.) und (34.) ergibt sich nun unmittelbar, daß jedes der Elemente $J_{P,Q}$ als Produkt der k^2 Elemente $J_{\varrho\sigma}=J_{P_\varrho,P_\sigma}$ darstellbar ist, und zwar ist, wenn $P=P_0^{x_0}P_1^{x_1}\dots P_{k-1}^{x_{k-1}}$ und $Q=P_0^{y_0}P_1^{y_1}\dots P_{k-1}^{y_{k-1}}$ gesetzt wird,

$$J_{P,Q} = \prod_{\varrho,\sigma} J_{\varrho\sigma}^{x_\varrho y_\sigma}. \qquad (\varrho,\sigma=0,1,\dots k-1)$$

Beachtet man noch, daß $J_{\sigma\varrho}=J_{\varrho\sigma}^{-1}$ ist, so kann man diese Gleichung auch in der Form

$$J_{P,Q} = \prod_{\varrho<\sigma} J_{\varrho\sigma}^{x_\varrho y_\sigma - x_\sigma y_\varrho}$$

schreiben. Aus den Relationen (35.) ergeben sich insbesondere die $\binom{k}{2}$ Formeln

(35′.) $$J_{\varkappa\lambda} = \prod_{\varrho<\sigma} J_{\varrho\sigma}^{a_{\varkappa\varrho}a_{\lambda\sigma}-a_{\varkappa\sigma}a_{\lambda\varrho}}. \qquad (\varkappa<\lambda)$$

Bezeichnet man nun die Matrix $\binom{k}{2}$-ten Grades der Determinanten zweiten Grades $\begin{vmatrix} a_{\varkappa\varrho} & a_{\varkappa\sigma} \\ a_{\lambda\varrho} & a_{\lambda\sigma} \end{vmatrix}$ mit $(c_{\alpha\beta})$, ferner die Determinante $|c_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}|$ mit d, so ergibt sich aus (35′.), wie man leicht sieht, für jedes der Elemente $J_{\varkappa\lambda}$ die Gleichung

$$J_{\varkappa\lambda}^d = E;$$

folglich ist auch allgemeiner $J_{P,Q}^{d} = E$. Nun lehren aber die Gleichungen (34.), daß auch $J_{P,Q}^{p^n} = E$ ist. Ist daher d zu p teilerfremd, so ergibt sich $J_{P,Q} = E$. Nun ist aber, wie ich D., S. 49, gezeigt habe, die r-te Potenz jedes Elementes J von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}'$ enthalten. Soll daher die Ordnung m von $\mathfrak{M}$ durch p teilbar sein, so muß $d \equiv 0 \pmod{p}$ sein, da andernfalls $J^r = E$ wäre, was für $m \equiv 0 \pmod{p}$ nicht möglich ist. — Die Bedingung $d \equiv 0 \pmod{p}$ besagt nun, daß eine der $\binom{k}{2}$ Wurzeln der Kongruenz

$$|c_{\alpha\beta} - x\delta_{\alpha\beta}| \equiv 0 \pmod{p}$$

gleich 1 ist. Diese Wurzeln sind aber bekanntlich,*) wenn $w_0, w_1, \ldots w_{k-1}$ die k Wurzeln der Kongruenz (32.) bedeuten, die Größen $w_0 w_1, w_0 w_2, \ldots w_{k-2} w_{k-1}$. Demnach kann in der Tat, wie zu beweisen ist, m nur dann durch p teilbar sein, wenn mindestens eines der Produkte $w_\varrho w_\sigma (\varrho \neq \sigma)$ gleich 1 ist.

Ich kehre nun zur Betrachtung der Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n}$, $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $\mathfrak{H}_{p^n}$ zurück.

Im folgenden soll mit $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)$ die gebrochene lineare Substitution $\xi = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$, mit $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$ die entsprechende ganze lineare Substitution bezeichnet werden, ferner soll v eine primitive Wurzel des Feldes $GF[p^n]$ bedeuten.**)

Ich behandle zuerst die Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n}$ $(p > 2)$ und $\mathfrak{L}_{p^n}$ $(p \geq 2)$.***)

Die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ enthält, wenn $p > 2$ ist, das von $E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ verschiedene invariante Element $F = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, und es ist, wenn die Gruppe $E + F$ mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird, $\frac{\mathfrak{L}_{p^n}}{\mathfrak{A}}$ der Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ isomorph. Ferner ist F ein Kommutatorelement von $\mathfrak{L}_{p^n}$; denn bedeuten α und β zwei der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 = -1$ genügende Zahlen des Feldes $GF[p^n]$, so wird

$$(36.)\qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = F.$$

*) Vgl. *G. Rados*, Math. Ann., Bd. 48, S. 417.

**) Betrachtet man die Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n}$ und $\mathfrak{H}_{p^n}$ als Gruppen von Permutationen der $p^n + 1$ Symbole $\infty, 0, 1, v, \ldots v^{p^n-2}$, so hat man der Substitution $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)$ die Permutation $\eta = \frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}$ zuzuordnen.

***) Für das im folgenden über die Konstitution dieser Gruppen angeführte verweise ich auf *Dickson*, Linear Groups, Cap. X und XII.

Bezeichnet man daher die Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{H}_{p^n}$ mit m, die des Multiplikators von $\mathfrak{L}_{p^n}$ mit m', so ist auf Grund unserer allgemeinen Resultate m durch 2 und $2m'$ durch m teilbar.

Ich werde nun zeigen, daß $\mathfrak{L}_{p^n}$ für $p \geqq 2$ mit Ausnahme der Fälle $p^n = 4$ und $p^n = 9$ eine abgeschlossene Gruppe ist. Es folgt dann unmittelbar, daß m für $p^n \neq 9$ gleich 2, und daß $\mathfrak{L}_{p^n}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}_{p^n}$ ist. Dagegen ist, wie ich gleich bemerken will, m für $p^n = 9$ gleich 6 und m' gleich 3.

Die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ enthält nämlich Elemente der Ordnung $p^n - 1$ und auch solche der Ordnung $p^n + 1$. Ist daher q^a die höchste in der Ordnung $l = p^n(p^{2n} - 1)$ von $\mathfrak{L}_{p^n}$ aufgehende Potenz einer zu $2p$ teilerfremden Primzahl q, so ist jede Untergruppe der Ordnung q^a von $\mathfrak{L}_{p^n}$ eine zyklische Gruppe. Mithin ist nach Satz V die gesuchte Zahl m' nicht durch q teilbar. Ist ferner $p > 2$, so ist $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ das einzige Element der Ordnung 2, das in $\mathfrak{L}_{p^n}$ vorkommt. Denn soll die Substitution $R = \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ von der Ordnung 2 sein, so muß

$$\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \nu, & -\lambda \\ -\mu & \varkappa \end{pmatrix},$$

also $\lambda = \mu = 0$, $\varkappa = \nu$, ferner $\varkappa^2 = 1$, also $\varkappa = \pm 1$ sein; da nun R nicht gleich E sein kann, so muß $R = F$ sein. Beachtet man noch, daß die in der Gleichung (36.) auftretenden Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 8 erzeugen, so ergibt sich, daß, wenn $p > 2$ und 2^b die höchste in l aufgehende Potenz von 2 ist, die Untergruppen der Ordnung 2^b von $\mathfrak{L}_{p^n}$ vom Quaternionentypus sind. Demnach ist nach Satz V die Zahl m' für $p > 2$ auch nicht durch 2 teilbar. Folglich ist in jedem Falle $m' = p^k$.

Die Untergruppen der Ordnung p^n von $\mathfrak{L}_{p^n}$ sind nun *Abel*sche Gruppen, deren Invarianten sämtlich gleich p sind. Daher ist*) $k \leqq \binom{n}{2}$.

Ist demnach $n = 1$, so wird $k = 0$ und also in der Tat $m' = 1$.

Es sei daher $n > 1$. Ich betrachte dann die Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung p^n von $\mathfrak{L}_{p^n}$, die aus allen Substitutionen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ besteht. Eine Basis dieser Gruppe bilden die Substitutionen

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^2 & 1 \end{pmatrix}, \ldots \; P_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^{2(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

*) Vgl. D., Satz X, und den Satz VIII dieser Arbeit.

Da nämlich die Potenzen

$$(37.)\qquad v^2,\ v^{2p},\ v^{2p^2}, \ldots v^{2p^{n-1}}$$

von v^2 unter einander verschieden sind, so genügt v^2 einer mod. p irreduziblen Kongruenz des Grades n, die wir in der Form

$$(38.)\qquad x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

schreiben können. Daher läßt sich jede Größe γ des Feldes $GF[p^n]$ auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\gamma = c_0 + c_1 v^2 + c_2 v^4 + \cdots + c_{n-1} v^{2(n-1)}$$

darstellen, wo $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ bedeuten. Da aber alsdann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = P_0^{c_0} P_1^{c_1} \ldots P_{n-1}^{c_{n-1}}$$

wird, so bilden $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$ in der Tat eine Basis der Gruppe $\mathfrak{P}$.

Nun ist die Substitution

$$A = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar, und zwar erhält man insbesondere

$$A^{-1}P_0A = P_1,\quad A^{-1}P_1A = P_2, \ldots A^{-1}P_{n-2}A = P_{n-1},\quad A^{-1}P_{n-1}A = P_0^{a_0}P_1^{a_1} \ldots P_{n-1}^{a_{n-1}}.$$

Soll daher m' durch p teilbar sein, so muß nach dem auf S. 114 angegebenen Hilfssatz die Kongruenz

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & -x, & 1, & \ldots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & -x, & 1 \\ a_0, & a_1, & a_2, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}-x \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}$$

ein Paar reziproker Wurzeln besitzen. Die links stehende Determinante ist aber gleich

$$(-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0),$$

also abgesehen vom Vorzeichen gleich der linken Seite der Kongruenz (38.). Die Wurzeln dieser Kongruenz sind die n Größen (37.). Soll daher $m' \equiv 0$

(mod. p) sein, so muß eine Gleichung der Form

$$v^{2(p^\varrho + p^\sigma)} = 1$$

bestehen, wo $0 < \sigma < \varrho \leqq n-1$ ist. Da nun v zum Exponenten $p^n - 1$ gehört, so erfordert dies, daß $2(p^{\varrho - \sigma} + 1)$ durch $p^n - 1$ teilbar sei. Zwei solche Zahlen ϱ und σ lassen sich aber nur dann bestimmen, wenn p^n gleich 4 oder gleich 9 ist. — Daher ist in der Tat für $p^n \neq 4$ und $\neq 9$ die Zahl $m' = 1$.

Es ist noch folgendes zu bemerken. Für $p^n > 3$ ist $\mathfrak{F}_{p^n}$ eine einfache Gruppe und besitzt als solche nur eine Darstellungsgruppe. Aber auch der Fall $p^n = 3$ bildet keine Ausnahme. Denn die Gruppe $\mathfrak{F}_3$*) besitzt die Ordnung 12, ihr Kommutator die Ordnung 4; nach Satz II hat daher, da $\frac{12}{4} = 3$ zu der Ordnung $m = 2$ des Multiplikators von $\mathfrak{F}_3$ teilerfremd ist, auch $\mathfrak{F}_3$ nur eine Darstellungsgruppe.

Wir erhalten den Satz:

IX. *Die Darstellungsgruppe der Gruppe* $\mathfrak{F}_{p^n}$ $(p > 2)$ *ist für* $p^n \neq 9$ *die Gruppe* $\mathfrak{L}_{p^n}$. *Die Gruppe* $\mathfrak{L}_{p^n}$ $(p \geqq 2)$ *ist, wenn* p^n *von* 4 *und von* 9 *verschieden ist, eine abgeschlossene Gruppe.*

Der Ausnahmefall $p^n = 4$ erledigt sich leicht. Denn die Gruppe $\mathfrak{L}_4$ ist der Gruppe $\mathfrak{F}_5$ isomorph;**) daher ist die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{L}_4$ die Gruppe $\mathfrak{L}_5$.

Von größerem Interesse ist der Fall $p^n = 9$. Da stets $m' \leqq p^{\binom{n}{2}}$, also $m \leqq 2p^{\binom{n}{2}}$ ist, so kommen hier für m nur die Werte 2 und 6 in betracht. Wäre nun $m = 2$, so wäre $\mathfrak{L}_9$ die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_9$. Der Grad einer jeden irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{F}_9$ durch ganze oder gebrochene lineare Substitutionen müßte daher unter den Graden $f = \chi(E)$ der Charaktere von $\mathfrak{L}_9$ enthalten sein. Nun ist aber die Gruppe $\mathfrak{F}_9$ der Ordnung $\frac{9(9^2-1)}{2} = 360$ der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_6$ des Grades 6 isomorph.***) Diese Gruppe ist, wie zuerst Herr *Wiman*†) nachgewiesen hat, einer von Herrn *Valentiner*††)

*) Die Gruppe $\mathfrak{F}_3$ ist der alternierenden Gruppe des Grades 4 isomorph.

**) Diese beiden Gruppen der Ordnung 60 sind der alternierenden Gruppe des Grades 5 isomorph. Vgl. *Dickson,* Linear Groups, S. 309.

***) Vgl. *Dickson,* a. a. O.

†) Math. Ann., Bd. 47, S. 531.

††) Schriften der Dänischen Akademie, Serie 6, Bd. V.

aufgestellten (irreduziblen) Gruppe ternärer linearer Substitutionen isomorph. Daher müßte eine der eben genannten Zahlen f gleich 3 sein. Es ist aber $f=\chi(E)$, falls $\chi(F)=-\chi(E)$ ist, durch 2 teilbar (vgl. D., S. 48). Ist dagegen $\chi(F)=\chi(E)$, so ist f auch der Grad eines Charakters der Gruppe $\mathfrak{F}_9$, oder was dasselbe ist, der Gruppe $\mathfrak{A}_6$. Unter den Graden der von Herrn *Frobenius**) bestimmten Charaktere der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_6$ kommt aber die Zahl 3 nicht vor. Daher kann $\mathfrak{L}_9$ nicht die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_9$ sein. Folglich ist $m=6$, und da m' durch $\frac{m}{2}=3$ teilbar und nicht größer als 3 ist, $m'=3$.**) Hieraus folgt, daß die Darstellungsgruppe $\mathfrak{L}_9'$ von $\mathfrak{F}_9$ von der Ordnung 6.360 ist und zugleich die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{L}_9$ repräsentiert.

Auf die genauere Bestimmung der Gruppe $\mathfrak{L}_9'$ gehe ich hier nicht ein, da ich in einer später erscheinenden Arbeit die Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen ausführlich behandeln werde.

Aus dem Satze IX ergibt sich auch, wie ich noch hinzufügen will, unmittelbar, daß die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ und das direkte Produkt der Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ und einer Gruppe der Ordnung 2 die einzigen Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ordnung $p^n(p^{2n}-1)$ sind, die eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung 2 derart enthalten, daß $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ der Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ isomorph wird.***) Denn enthält der Kommutator $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{A}$, so wird $\mathfrak{G}$ für $p^n \neq 9$ der Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_{p^n}$, für $p^n=9$, falls $\mathfrak{M}'$ den Multiplikator von $\mathfrak{L}_9$ bedeutet, nach Satz III der Gruppe $\frac{\mathfrak{L}_9'}{\mathfrak{M}'}$ isomorph; in jedem Falle wird also $\mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ isomorph. Ist aber $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd, so wird für $p^n>3$ die Gruppe $\mathfrak{R}$ isomorph $\mathfrak{F}_{p^n}$, also ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}_{p^n}$. Daß auch der Fall $p^n=3$ keine Ausnahme bildet, ergibt sich wieder aus dem Umstand, daß der Index des Kommutators von $\mathfrak{F}_3$ zu der Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{F}_3$ teilerfremd ist.

Ich betrachte nun die Gruppe $\mathfrak{H}_{p^n}$ $(p>2)$.

---

*) Sitzungsberichte der Berl. Akad., 1899, S. 337, und 1901, S. 303.

**) Aus dem Gesagten ergibt sich zugleich, daß die Valentinergruppe sich nicht als Gruppe von weniger als 3.360 ganzen linearen Substitutionen schreiben läßt. Dies ist zuerst von Herrn *Wiman* a. a. O. nachgewiesen worden.

***) Die Vermutung, daß dieser Satz für die Gruppe $\mathfrak{F}_p$ besteht, hat bereits Herr *Frobenius*, Sitzungsberichte der Berl. Akad., 1902, S. 365, ausgesprochen.

Diese Gruppe enthält die Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n}$ als Untergruppe vom Index 2, und zwar ist $\mathfrak{F}_{p^n}$ der Kommutator der Gruppe.

Ist nun $p^n \neq 9$, so ist der Multiplikator von $\mathfrak{F}_{p^n}$ von der Ordnung 2. Daher ist nach D., Satz IX, die Ordnung m'' des Multiplikators von $\mathfrak{H}_{p^n}$ durch keine ungerade Primzahl teilbar; es ist also $m'' = 2^\lambda$. Nun sind aber, wenn 2^b die höchste in der Ordnung $p^n(p^{2n}-1)$ von $\mathfrak{H}_{p^n}$ aufgehende Potenz von 2 ist, die Untergruppen der Ordnung 2^b von $\mathfrak{H}_{p^n}$ Diedergruppen. Da der Multiplikator einer solchen Gruppe, wie auf S. 109 gezeigt worden ist, die Ordnung 2 besitzt, so ist (vgl. D., Satz X) $2^\lambda \leqq 2$, also m'' gleich 1 oder gleich 2.

Ich betrachte nun die Gruppe $\mathfrak{G}_{p^n}$, die aus allen ganzen linearen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von nicht verschwindender Determinante (mit Koeffizienten aus dem Felde $GF[p^n]$) besteht. Diese Gruppe enthält p^n-1 invariante Elemente $\begin{pmatrix}v^\varkappa & 0\\ 0 & v^\varkappa\end{pmatrix}$, die eine zyklische Gruppe $\mathfrak{C}$ bilden, und es ist $\frac{\mathfrak{G}_{p^n}}{\mathfrak{C}}$ der Gruppe $\mathfrak{H}_{p^n}$ isomorph. Ferner ist der Kommutator von $\mathfrak{G}_{p^n}$ die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$. Die Ordnung dieser Gruppe ist aber gleich dem zweifachen Wert der Ordnung des Kommutators von $\mathfrak{H}_{p^n}$. Daher ist nach D., Satz II, die Zahl m'' gerade; folglich ist m'' für $p^n \neq 9$ gleich 2.

Auch der Fall $p^n = 9$*) spielt hier keine Ausnahmerolle. Denn da der Multiplikator von $\mathfrak{F}_9$ die Ordnung 6 besitzt und m'' gerade ist, so sieht man leicht ein, daß für m'' nur die Werte 2 und 6 in Betracht kommen. Es kann aber nicht $m'' \equiv 0 \pmod{3}$ sein. Denn man betrachte die Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung 9 von $\mathfrak{H}_9$, die aus den Substitutionen $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$ besteht. Als Basis dieser Gruppe kann man die Substitutionen

$$P_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix}$$

wählen. Setzt man ferner $A = \begin{pmatrix}v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, so wird

$$A^{-1} P_0 A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix} = P_1, \quad A^{-1} P_1 A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ v^2 & 1\end{pmatrix} = P_0^{b_0} P_1^{b_1},$$

wo die Exponenten b_0 und b_1 durch die (irreduzible) Kongruenz

$$x^2 \equiv b_1 x + b_0 \pmod{3},$$

*) Die Gruppe $\mathfrak{H}_9$, deren Ordnung gleich $720 = 6!$ ist, und die eine der alternierenden Gruppen 6. Grades isomorphe invariante Untergruppe enthält, ist bekanntlich *nicht* der symmetrischen Gruppe des Grades 6 isomorph.

der v genügt, bestimmt sind. Wäre nun $m'' \equiv 0$ (mod. 3), so müßte auf Grund des früher abgeleiteten Hilfssatzes die Kongruenz

$$\begin{vmatrix} -x, & 1 \\ b_0, & b_1 - x \end{vmatrix} = x^2 - b_1 x - b_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3)$$

reziproke Wurzeln besitzen. Dies ist aber nicht der Fall, da die Wurzeln dieser Kongruenz die Größen v und v^3 sind, und v zum Exponenten $3^2 - 1 = 8$ gehört. Daher ist auch für $p^n = 9$ die Zahl m'' gleich 2.

Nach den Ergebnissen des § 1 müssen sich, da der Index des Kommutators von $\mathfrak{H}_{p^n}$ gleich 2 und auch m'' gleich 2 ist, für die Gruppe $\mathfrak{H}_{p^n}$ zwei Darstellungsgruppen der Ordnung $2p^n(p^{2n} - 1)$ angeben lassen, zwischen denen kein Isomorphismus erster Art besteht.

Diese beiden Gruppen lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

Es möge w eine primitive Wurzel des *Galois*schen Feldes $GF[p^{2n}]$ bedeuten; ferner sei $p^n - 1 = 2^r q$, wo q ungerade ist, und

$$u = w^{\frac{(p^n+1)q}{2}}.$$

Dann ist u^2 eine Größe des Feldes $GF[p^n]$, das durch die Null und die $p^n - 1$ Potenzen von $w^{p^n+1} = v$ gebildet wird, ferner ist $u^{2^r} = -1$. Betrachtet man nun die Substitutionen

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} u^{2^{r-1}+1} & 0 \\ 0 & u^{2^{r-1}-1} \end{pmatrix},$$

so bilden die in den Komplexen $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $U\mathfrak{L}_{p^n}$, bzw. $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $U'\mathfrak{L}_{p^n}$ enthaltenen Substitutionen je eine Gruppe der Ordnung $2p^n(p^{2n} - 1)$. Die so entstehenden Gruppen

$$\mathfrak{K}_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} + U\mathfrak{L}_{p^n},$$
$$\mathfrak{K}'_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} + U'\mathfrak{L}_{p^n}$$

sind die beiden gesuchten Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}_{p^n}$.*)

Daß diese Gruppen einander nicht isomorph sind, sieht man am einfachsten folgendermaßen ein.**)

*) Für $p^n \equiv -1$ (mod. 4) ist $\mathfrak{K}'_{p^n}$ die Gruppe der Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten aus dem Felde $GF[p^n]$, deren Determinanten $\alpha\delta - \beta\gamma$ die Werte ± 1 haben.

**) Für $n = 1$ folgt dies bereits aus dem Umstand, daß $\mathfrak{H}_p$ eine vollkommene Gruppe ist (vgl. *Hölder*, a. a. O., § 11).

In der Gruppe $\mathfrak{K}'_{p^n}$ kommen mehrere Elemente der Ordnung 2 vor, z. B. die Substitution $F=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ und

$$U'\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u^{2^{r-1}+1}\\ -u^{2^{r-1}-1} & 0\end{pmatrix}.$$

Dagegen ist in $\mathfrak{K}_{p^n}$ die Substitution F das einzige Element der Ordnung 2. Daß dies für die Untergruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ dieser Gruppe der Fall ist, ist bereits erwähnt worden. Es kann aber auch nicht eine Substitution der Form

$$\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

die Ordnung 2 besitzen. Denn es müßte dann sein

$$\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^{-1} & 0\\ 0 & u\end{pmatrix};$$

hieraus würde folgen

$$\beta=0,\ \gamma=0,\quad \delta=\alpha u^2,$$

also wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ noch $\alpha^2u^2=1$. Eine solche Gleichung kann aber nicht bestehen, weil $u^2=v^q$ ein quadratischer Nichtrest des Feldes $GF[p^n]$ ist.

Aus dem eben Gesagten folgt zugleich, daß, wenn 2^c die höchste in $2p^n(p^{2n}-1)$ aufgehende Potenz von 2 ist, die Untergruppen der Ordnung 2^c der Gruppe $\mathfrak{K}_{p^n}$ vom Quaternionentypus sind. Dagegen sind, wie sich zeigen läßt, die Untergruppen der Ordnung 2^c von $\mathfrak{K}'_{p^n}$ von dem in § 4 unter 3. erwähnten Typus.

Hieraus schließt man leicht, daß die Gruppen $\mathfrak{K}_{p^n}$ und $\mathfrak{K}'_{p^n}$ abgeschlossene Gruppen sind.

Zuletzt bemerke ich noch, daß auch die Gruppe $\mathfrak{G}_{p^n}$ der Ordnung $p^n(p^n-1)(p^{2n}-1)$ stets (für $p\geqq 2$) eine abgeschlossene Gruppe ist.

§ 6.

Handelt es sich nun darum, die sämtlichen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n}$, $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $\mathfrak{H}_{p^n}$ durch ganze oder gebrochene lineare Substitutionen zu bestimmen, so hat man auf Grund der im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate nur die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ und einer der beiden Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}_{p^n}$, etwa der Gruppe $\mathfrak{K}_{p^n}$, durch ganze lineare

Substitutionen zu betrachten. — Eine wesentliche Ausnahme bildet für die Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n}$ und $\mathfrak{L}_{p^n}$ nur der Fall $p^n = 9$, da in diesem Falle $\mathfrak{L}_9$ nicht die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_9$ und auch nicht eine abgeschlossene Gruppe ist.

Um nun eine genaue Übersicht über die verschiedenen Gruppen ganzer linearer Substitutionen, die den Gruppen $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $\mathfrak{K}_{p^n}$ isomorph sind, zu geben, will ich im folgenden die Charaktere dieser beiden Gruppen berechnen.

Es mögen zunächst einige von Herrn *Frobenius**) herrührende Definitionen und Sätze vorausgeschickt werden:

„Es sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h, deren Elemente in k Klassen konjugierter Elemente zerfallen. Es möge die Klasse, der das Element R angehört, mit (R) bezeichnet werden, und es sei h_R die Anzahl der in (R) vorkommenden Elemente. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ besitzt dann k einfache Charaktere

$$\chi^{(0)}(R),\ \chi^{(1)}(R), \dots \chi^{(k-1)}(R)$$

und es bestehen die Relationen

$$\chi^{(\varkappa)}(Q^{-1}RQ) = \chi^{(\varkappa)}(R),$$

$$\sum_R \chi^{(\varkappa)}(R^{-1})\chi^{(\varkappa)}(R) = h, \qquad \sum_R \chi^{(\varkappa)}(R^{-1})\chi^{(\lambda)}(R) = 0, \qquad (\varkappa \neq \lambda) \tag{39.}$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{k-1} \chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\varkappa)}(S^{-1}) = \frac{h}{h_R}\varepsilon_{R,S}; \tag{40.}$$

hierbei ist in den Formeln (39.) die Summation über alle Elemente R der Gruppe zu erstrecken, ferner hat man in (40.) die Größe $\varepsilon_{R,S}$ gleich 1 oder gleich 0 zu setzen, je nachdem R und S einander konjugiert sind oder nicht.

Ein System von h Zahlen $\chi(R)$ wird als ein zusammengesetzter Charakter von $\mathfrak{H}$ bezeichnet, wenn sich k ganze rationale Zahlen $r_\varkappa$ bestimmen lassen, so daß für jedes R

$$\chi(R) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} r_\varkappa \chi^{(\varkappa)}(R)$$

wird; ist insbesondere jede der Zahlen $r_\varkappa$ nicht negativ, so nennt man $\chi(R)$ einen eigentlichen Charakter der Gruppe. Für den Charakter $\chi(R)$ gelten die Formeln

$$\sum_R \chi(R)\chi^{(\varkappa)}(R^{-1}) = hr_\varkappa, \qquad \sum_R \chi(R^{-1})\chi(R) = h(r_0^2 + r_1^2 \cdots + r_{k-1}^2).$$

*) Sitzungsberichte der Berl. Akad., 1896, S. 985, 1898, S. 501 und 1899, S. 330.

Ein zusammengesetzter Charakter $\chi(R)$ ist dann und nur dann ein einfacher Charakter, wenn die ganze rationale Zahl $\chi(E)$ positiv und $\sum_R \chi(R^{-1})\chi(R) = h$ ist.

Sind ferner $\chi(R)$ und $\chi_1(R)$ zwei einfache oder zusammengesetzte Charaktere der Gruppe, so bilden auch die h Zahlen $\chi(R)\chi_1(R)$ einen solchen.

Ist endlich $\mathfrak{Q}$ eine Untergruppe der Ordnung q von $\mathfrak{H}$ und ist $\varphi(Q)$ ein eigentlicher Charakter der Gruppe $\mathfrak{Q}$, so erhält man einen eigentlichen Charakter $\chi(R)$ der Gruppe $\mathfrak{H}$, indem man

$$\chi(R) = \frac{h}{q h_R} \sum_Q \varphi(Q) \tag{41.}$$

setzt; hierbei ist die Summe über alle h_R Elemente Q der Klasse (R) zu erstrecken und $\varphi(Q) = 0$ zu setzen, falls Q nicht in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist."

Ich will hier noch eine Formel ableiten, die sich auf Gruppen mit invarianten Elementen bezieht und eine Verallgemeinerung der Formel (40.) repräsentiert.

Es sei nämlich $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung g, die eine aus a invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{A}$ enthält. Es möge nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ genau k Klassen konjugierter Elemente

$$(R_0),\ (R_1), \ldots (R_{k-1})$$

enthalten von der Beschaffenheit, daß kein Element einer dieser Klassen einem Element einer anderen Klasse derselben Reihe mod. $\mathfrak{A}$ kongruent wird; es sei g_ϱ die Anzahl der in (R_ϱ) enthaltenen Elemente. Ist nun R ein Element der Klasse (R_ϱ), so mögen a_ϱ verschiedene Elemente von (R_ϱ), etwa

$$A_0 R,\ A_1 R, \ldots A_{a_\varrho - 1} R$$

dem Komplex $\mathfrak{A}R$ angehören. Dann bilden (vgl. D., S. 43) die Elemente $A_0, A_1, \ldots A_{a_\varrho - 1}$ eine Untergruppe $\mathfrak{A}_\varrho$ von $\mathfrak{A}$, die von der Wahl des Elementes R innerhalb der Klasse (R_ϱ) unabhängig ist. Ist nun $\psi^{(\alpha)}(A)$ einer der a Charaktere der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{A}$ und bilden diejenigen Elemente B von $\mathfrak{A}$, für die $\psi^{(\alpha)}(B) = 1$ ist, die Untergruppe $\mathfrak{B}_\alpha$ von $\mathfrak{A}$, so mögen $\mathfrak{B}_\alpha$ und $\mathfrak{A}_\varrho$ genau $d_{\alpha\varrho}$ Elemente gemeinsam haben. Dann ist, wie ich D., S. 44, gezeigt habe, die Anzahl l_α derjenigen (einfachen) Charaktere

$$\chi^{(1)}(R),\ \chi^{(2)}(R), \ldots \chi^{(l_\alpha)}(R) \tag{42.}$$

von $\mathfrak{G}$, für die

$$\chi^{(\lambda)}(AR) = \psi^{(\alpha)}(A)\,\chi^{(\lambda)}(R)$$

ist, durch die Gleichung

$$(43.)\qquad l_\alpha = \sum_{\varrho=0}^{k-1}\left[\frac{d_{\alpha\varrho}}{a_\varrho}\right]$$

bestimmt, wo $\left[\frac{d_{\alpha\varrho}}{a_\varrho}\right]$ gleich 0 oder gleich 1 zu setzen ist, je nachdem $d_{\alpha\varrho} < a_\varrho$ oder $= a_\varrho$ wird.

Für die l_α Charaktere (42.) bestehen nun, wie ich zeigen will, noch folgende Relationen: ist R ein Element von $\mathfrak{G}$, das einem der g_ϱ Elemente der Klasse (R_ϱ) mod. $\mathfrak{A}$ kongruent ist, so ist

$$(44.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l_\alpha}\chi^{(\lambda)}(R^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{g a_\varrho}{g_\varrho a}\left[\frac{d_{\alpha\varrho}}{a_\varrho}\right],$$

sind ferner R und S zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, für die kein Element des Komplexes $\mathfrak{A}R$ einem Element des Komplexes $\mathfrak{A}S$ konjugiert ist, so ist

$$(45.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l_\alpha}\chi^{(\lambda)}(R^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(S) = 0\,.$$

Bei dem Beweise der Formel (44.) kann offenbar angenommen werden, daß R selbst der Klasse (R_ϱ) angehört; denn die linke Seite dieser Gleichung bleibt ungeändert, wenn R durch irgend ein Element des Komplexes $\mathfrak{A}R$ ersetzt wird. — Nun ist aber, falls $\chi^{(\lambda)}(E) = f_\lambda$ gesetzt wird,

$$(46.)\qquad \chi^{(\lambda)}(P)\,\chi^{(\lambda)}(Q) = \frac{f_\lambda}{g}\sum_T \chi^{(\lambda)}(PT^{-1}QT),$$

wo T alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft, ferner ist (vgl. D., Formel (23.))

$$(47.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l_\alpha} f_\lambda\,\chi^{(\lambda)}(P) = \frac{g}{a}\,\psi^{(\alpha)}(P)\quad\text{oder}\quad = 0,$$

je nachdem P in $\mathfrak{A}$ enthalten ist oder nicht. Aus (46.) ergibt sich nun

$$\sum_{\lambda=1}^{l_\alpha}\chi^{(\lambda)}(R^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{1}{g}\sum_T\sum_{\lambda=1}^{l_\alpha} f_\lambda\,\chi^{(\lambda)}(R^{-1}T^{-1}RT).$$

Nach (47.) ist hier die Teilsumme

$$\sum_{\lambda=1}^{l_\alpha} f_\lambda\,\chi^{(\lambda)}(R^{-1}T^{-1}RT),$$

falls $T^{-1}RT = JR$ gesetzt wird, gleich $\frac{g}{a}\psi^{(\alpha)}(J)$, wenn J in $\mathfrak{A}_\varrho$ enthalten ist, sonst aber gleich 0. Ferner wird die Gleichung $T^{-1}RT = JR$ für jedes Element J von $\mathfrak{A}_\varrho$ durch genau $\frac{g}{g_\varrho}$ verschiedene Elemente T befriedigt. Daher ist

$$(44'.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l_a} \chi^{(\lambda)}(R^{-1})\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{1}{g}\cdot\frac{g}{g_\varrho}\cdot\frac{g}{a}\sum_J \psi^{(\alpha)}(J),$$

wo J alle Elemente von $\mathfrak{A}_\varrho$ durchläuft. Die Summe $\sum_J \psi^{(\alpha)}(J)$ ist aber, wie ich D., S. 43, genauer ausgeführt habe, gleich $a_\varrho\left[\frac{d_{a\varrho}}{a_\varrho}\right]$. Setzt man dies in die Gleichung (44'.) ein, so ergibt sich die Formel (44.). — Ebenso erhält man aus (46.)

$$\sum_{\lambda=1}^{l_a} \chi^{(\lambda)}(R^{-1})\chi^{(\lambda)}(S) = \frac{1}{g}\sum_T \sum_{\lambda=1}^{l_a} f_\lambda \chi^{(\lambda)}(R^{-1}T^{-1}ST).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach (47.) gleich 0, weil auf Grund der über R und S gemachten Voraussetzung das Element $R^{-1}T^{-1}ST$ für kein Element T von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten sein kann; damit ist auch die Formel (45.) bewiesen.

Ich wende mich nun zur Berechnung der Charaktere der Gruppen $\mathfrak{L}_{p^n}$ und $\mathfrak{K}_{p^n}$. Hierbei setze ich überall zur Abkürzung $s = p^n$.

1. *Die Gruppe $\mathfrak{L}_s$ für den Fall $s \equiv 1$ (mod. 2).*

Setzt man

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&0\\v&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}v&0\\0&v^{-1}\end{pmatrix}$$

und versteht unter B ein Element der Ordnung $s+1$ der Gruppe, so zerfallen die $s(s^2-1)$ Elemente von $\mathfrak{L}_s$ in die $s+4$ Klassen

$$(E),\ (F),\ (P),\ (Q),\ (FP),\ (FQ),$$
$$(A),\ (A^2),\dots(A^{\frac{s-3}{2}}),\qquad (B),\ (B^2),\dots(B^{\frac{s-1}{2}}),$$

und zwar enthalten die ersten beiden dieser Klassen je ein Element, die 4 folgenden je $\frac{s^2-1}{2}$ Elemente, während jede der $\frac{s-3}{2}$ Klassen (A^α) aus $s(s+1)$,

jede der $\frac{s-1}{2}$ Klassen (B^b) aus $s(s-1)$ Elementen besteht.*) Ist ferner

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{s-1}{2}},$$

so stimmt für $\varepsilon = +1$ jede Klasse (R) mit der inversen Klasse (R^{-1}) überein; dagegen ist dies, falls $\varepsilon = -1$ ist, für alle Klassen mit Ausnahme der 4 Klassen (P), (Q), (FP), (FQ) der Fall, und zwar sind dann (P) und (Q) bzw. (FP) und (FQ) inverse Klassen. Endlich gehören im allgemeinen R und FR zwei verschiedenen Klassen an; eine Ausnahme tritt, falls $\varepsilon = +1$ ist, nur für die Elemente der Klasse $(A^{\frac{s-1}{4}})$, falls $\varepsilon = -1$ ist, nur für die Elemente der Klasse $(B^{\frac{s+1}{4}})$ ein.

Hieraus folgt auf Grund der Formel (43.), daß die Gruppe $\mathfrak{L}_s$ genau $\frac{s+4-1}{2} + 1 = \frac{s+5}{2}$ (einfache) Charaktere $\chi(R)$ besitzt, für die

$$\chi(F) = \chi(E) \tag{48.}$$

ist, und $\frac{s+4-1}{2} = \frac{s+3}{2}$ Charaktere, für die

$$\chi(F) = -\chi(E) \tag{49.}$$

ist. Ich will den Charakter $\chi(R)$ als einen Charakter erster oder zweiter Art bezeichnen, je nachdem die Gleichung (48.) oder (49.) besteht.

Die $s+4$ Charaktere von $\mathfrak{L}_s$ lassen sich in folgender Tabelle zusammenfassen:

	1	1	$\frac{s-3}{2}$	$\frac{s-1}{2}$	2	2
$\chi(E)$	1	s	$s+1$	$s-1$	$\frac{1}{2}(s+1)$	$\frac{1}{2}(s-1)$
$\chi(F)$	1	s	$(-1)^a(s+1)$	$(-1)^\beta(s-1)$	$\frac{\varepsilon}{2}(s+1)$	$-\frac{\varepsilon}{2}(s-1)$
$\chi(P)$	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\varepsilon s})$	$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{\varepsilon s})$
$\chi(Q)$	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{\varepsilon s})$	$\frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{\varepsilon s})$
$\chi(A^a)$	1	1	$\varrho^{\alpha a} + \varrho^{-\alpha a}$	0	$(-1)^a$	0
$\chi(B^b)$	1	-1	0	$-(\sigma^{\beta b} + \sigma^{-\beta b})$	0	$-(-1)^b$.

*) Vgl. *Dickson*, Linear Groups, Cap. XII.

Hierin bedeuten ϱ und σ primitive Einheitswurzeln der Grade $s-1$, bzw. $s+1$; für a und α sind die Zahlen $1, 2, \dots \frac{s-3}{2}$, für b und β die Zahlen $1, 2, \dots \frac{s-1}{2}$ zu setzen. Die Werte der Charaktere für die hier fehlenden Klassen (FP) und (FQ) ergeben sich vermöge der Formeln

$$\chi(FP) = \frac{\chi(F)}{\chi(E)}\chi(P), \qquad \chi(FQ) = \frac{\chi(F)}{\chi(E)}\chi(Q).$$

Die vorstehende Tabelle habe ich auf folgendem Wege berechnet.

Der in der ersten Kolonne stehende Charakter ist der Hauptcharakter $\chi^{(0)}(R) = 1$. Die $1 + \frac{s-3}{2}$ Charaktere der Grade s und $s+1$ ergeben sich durch Betrachtung der Untergruppe $\mathfrak{Q}$ der Ordnung $s(s-1)$ von $\mathfrak{L}_s$, die aus allen Substitutionen der Form $\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ \lambda & \varkappa^{-1} \end{pmatrix}$ besteht. Unter den Substitutionen dieser Untergruppe gehören je $\frac{s-1}{2}$ den Klassen (P), (Q), (FP), (FQ) an, nämlich bzw. die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu\mu & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\nu\mu & -1 \end{pmatrix},$$

wo für μ die $\frac{s-1}{2}$ quadratischen Reste $1, \nu^2, \dots \nu^{s-3}$ des Feldes $GF[p^n]$ zu setzen sind. Ferner gehören, wenn a eine der Zahlen $1, 2, \dots \frac{s-3}{2}$ bedeutet, die $2s$ Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \nu^a & 0 \\ \lambda & \nu^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu^{-a} & 0 \\ \lambda & \nu^a \end{pmatrix} \qquad (\lambda = 0, 1, \nu, \nu^2, \dots \nu^{s-2})$$

der Klasse (A^a) an. Außerdem enthält $\mathfrak{Q}$ noch die Substitutionen E und F. Dagegen besitzen die $\frac{s-1}{2}$ Klassen (B^b) in $\mathfrak{Q}$ keinen Repräsentanten.

Man erhält nun, wie unmittelbar ersichtlich ist, einen linearen Charakter $\psi^{(\alpha)}(R)$ von $\mathfrak{Q}$, indem man, falls $R = \begin{pmatrix} \nu^d & 0 \\ \lambda & \nu^{-d} \end{pmatrix}$ ist,

$$\psi^{(\alpha)}(R) = \varrho^{\alpha d} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots s-2)$$

setzt. Mit Hilfe der Formel (41.) ergibt sich dann für jeden der Charaktere $\psi^{(\alpha)}(R)$ von $\mathfrak{Q}$ folgender eigentliche (zusammengesetzte) Charakter $\zeta_\alpha(R)$ von $\mathfrak{L}_s$:

$$\zeta_\alpha(E) = s+1, \qquad \zeta_\alpha(F) = (-1)^\alpha(s+1),$$
$$\zeta_\alpha(P) = \zeta_\alpha(Q) = 1, \qquad \zeta_\alpha(FP) = \zeta_\alpha(FQ) = (-1)^\alpha,$$
$$\zeta_\alpha(A^a) = \varrho^{a\alpha} + \varrho^{-a\alpha}, \qquad \zeta_\alpha(B^b) = 0.$$

Hat nun α einen der Werte $1, 2, \ldots \frac{s-3}{2}$, so ergibt die Rechnung $\sum\limits_R \zeta_\alpha(R^{-1})\zeta_\alpha(R) = s(s^2-1)$; daher ist $\zeta_\alpha(R)$ ein einfacher Charakter der Gruppe. Dies gibt uns die $\frac{s-3}{2}$ Charaktere des Grades $s+1$ unserer Tabelle; sie mögen noch mit $\chi^{(2)}(R), \chi^{(3)}(R), \ldots \chi^{\left(\frac{s-1}{2}\right)}(R)$ bezeichnet werden. Ist dagegen $\alpha = 0$, so ist, wie man ebenso zeigt,

$$\chi^{(1)}(R) = \zeta_0(R) - \chi^{(0)}(R) = \zeta_0(R) - 1$$

ein einfacher Charakter. Dies ist der in der zweiten Kolonne der Tabelle angegebene Charakter.

Für $\alpha = \frac{s-1}{2}$ erhält man noch den zusammengesetzten Charakter $\zeta_{\frac{s-1}{2}}(R) = \zeta(R)$:

$$\zeta(E) = s+1, \qquad \zeta(F) = \varepsilon(s+1),$$
$$\zeta(P) = \zeta(Q) = 1, \qquad \zeta(FP) = \zeta(FQ) = \varepsilon,$$
$$\zeta(A^a) = 2(-1)^a, \qquad \zeta(B^b) = 0.$$

Da, wie man leicht findet, $\sum\limits_R \zeta(R^{-1})\zeta(R) = 2s(s^2-1)$ ist, so ist $\zeta(R)$ eine Summe von zwei verschiedenen einfachen Charakteren $\xi_1(R)$ und $\xi_2(R)$, und zwar ist, weil $\zeta(F) = \varepsilon\zeta(E)$ ist, auch

$$\xi_1(F) = \varepsilon\xi_1(E), \qquad \xi_2(F) = \varepsilon\xi_2(E). \tag{50.}$$

Ich betrachte nun die durch die Potenzen von B gebildete zyklische Untergruppe der Ordnung $s+1$. Dem Charakter

$$\psi^{(\beta)}(B^e) = \sigma^{\beta e} \qquad {\scriptstyle (e=0,1,\ldots s)}$$

dieser Untergruppe entspricht, wie man leicht zeigt, folgender eigentliche Charakter $\varphi_\beta(R)$ von $\mathfrak{L}_s$:

$$\varphi_\beta(E) = s(s-1), \qquad \varphi_\beta(F) = (-1)^\beta s(s-1),$$
$$\varphi_\beta(P) = \varphi_\beta(Q) = \varphi_\beta(FP) = \varphi_\beta(FQ) = 0,$$
$$\varphi_\beta(A^a) = 0, \qquad \varphi_\beta(B^b) = \sigma^{\beta b} + \sigma^{-\beta b}.$$

Man bilde nun für $\beta = 1, 2, \ldots \frac{s+1}{2}$ den zusammengesetzten Charakter

$$\vartheta_\beta(R) = \chi^{(1)}(R)\zeta_\beta(R) - \zeta_\beta(R) - \varphi_\beta(R),$$

der aber nicht mehr ein eigentlicher Charakter zu sein braucht. Es ergibt sich:

$$\vartheta_\beta(E) = s-1, \qquad \vartheta_\beta(F) = (-1)^\beta(s-1),$$
$$\vartheta_\beta(P) = \vartheta_\beta(Q) = -1, \qquad \vartheta_\beta(FP) = \vartheta_\beta(FQ) = -(-1)^\beta,$$
$$\vartheta_\beta(A^a) = 0, \qquad \vartheta_\beta(B^b) = -(\sigma^{\beta b} + \sigma^{-\beta b}).$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß für $\beta = 1, 2, \dots \frac{s-1}{2}$

$$\sum_R \vartheta_\beta(R^{-1})\,\vartheta_\beta(R) = s(s^2-1)$$

wird. Da außerdem $\vartheta_\beta(E) > 0$ ist, so sind daher $\vartheta_1(R), \vartheta_2(R), \dots \vartheta_{\frac{s-1}{2}}(R)$ einfache Charaktere, die, wie unmittelbar ersichtlich ist, unter einander verschieden sind. Es sind das die $\frac{s-1}{2}$ Charaktere des Grades $s-1$ unserer Tabelle; sie mögen auch mit $\chi^{(\frac{s+1}{2})}(R), \dots \chi^{(s-1)}(R)$ bezeichnet werden.

Für $\beta = \frac{s+1}{2}$ erhält man noch den zusammengesetzten Charakter $\vartheta_{\frac{s+1}{2}}(R) = \vartheta(R)$:

$$\vartheta(E) = s-1, \qquad \vartheta(F) = -\varepsilon(s-1),$$
$$\vartheta(P) = \vartheta(Q) = -1, \qquad \vartheta(FP) = \vartheta(FQ) = \varepsilon,$$
$$\vartheta(A^a) = 0, \qquad \vartheta(B^b) = -2(-1)^b.$$

Die Rechnung ergibt ferner

$$\sum_R \vartheta(R^{-1})\,\vartheta(R) = 2s(s^2-1), \qquad \sum_R \vartheta(R^{-1})\chi^{(\gamma)}(R) = 0. \qquad (\gamma=0,1,\dots s-1)$$

Daher ist $\vartheta(R)$ die Summe oder die Differenz von zwei verschiedenen einfachen Charakteren $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$, die von den bereits erhaltenen s Charakteren $\chi^{(\gamma)}(R)$ verschieden sind. Da außerdem $\vartheta(F) = -\varepsilon\vartheta(E)$ ist, so muß, wie leicht zu ersehen ist, auch

$$\eta_1(F) = -\varepsilon\eta_1(E), \qquad \eta_2(F) = -\varepsilon\eta_2(E)$$

sein; folglich sind $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$ wegen (50.) auch von den Charakteren $\xi_1(R)$ und $\xi_2(R)$ verschieden. Endlich findet man noch

$$\sum_R \zeta(R^{-1})\chi^{(\gamma)}(R) = 0; \qquad (\gamma=0,1,\dots s-1)$$

daher sind auch die Charaktere $\xi_1(R)$ und $\xi_2(R)$ von den s Charakteren $\chi^{(\gamma)}(R)$ verschieden.

Es sind nun im ganzen $s+4$ einfache Charaktere zu berechnen; wir haben bereits s erhalten, folglich fehlen noch 4 und das müssen die Charaktere $\xi_1(R)$, $\xi_2(R)$, $\eta_1(R)$, $\eta_2(R)$ sein.

Die Berechnung dieser 4 Charaktere ergibt sich durch Anwendung der Formeln (44.) und (45.) auf unseren Fall.

Zunächst zeige ich, daß $\vartheta(R)$ notwendig die Summe der beiden Charaktere $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$ sein muß. Ist nämlich $\varepsilon=+1$, so sind $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$ Charaktere zweiter Art. Unter den s Charakteren $\chi^{(\gamma)}(R)$ sind ferner solche zweiter Art

$$\chi^{(2)}(R), \chi^{(4)}(R), \ldots \chi^{\left(\frac{s-1}{2}\right)}(R), \quad \chi^{\left(\frac{s+1}{2}\right)}(R), \chi^{\left(\frac{s+5}{2}\right)}(R), \ldots \chi^{(s-2)}(R).$$

Es muß aber nach (44.) die Summe der Quadrate der Grade aller Charaktere zweiter Art gleich $\frac{s(s^2-1)}{2}$ sein, daher ist

$$\frac{s-1}{4}(s+1)^2+\frac{s-1}{4}(s-1)^2+\eta_1^2(E)+\eta_2^2(E)=\frac{s(s^2-1)}{2},$$

also

$$\eta_1^2(E)+\eta_2^2(E)=\frac{(s-1)^2}{2}.$$

Für $\varepsilon=-1$ erhält man ebenso durch Betrachtung der Charaktere erster Art

$$1+s^2+\frac{s-3}{4}(s+1)^2+\frac{s-3}{4}(s-1)^2+\eta_1^2(E)+\eta_2^2(E)=\frac{s(s^2-1)}{2},$$

also wieder

$$\eta_1^2(E)+\eta_2^2(E)=\frac{(s-1)^2}{2}.$$

Wäre nun $\vartheta(R)=\eta_1(R)-\eta_2(R)$, also $\eta_1(E)-\eta_2(E)=s-1$, so würde sich $\eta_1(E)\,\eta_2(E)=-\frac{(s-1)^2}{2}$ ergeben, was nicht möglich ist, da $\eta_1(E)$ und $\eta_2(E)$ positive ganze Zahlen sind. Daher ist in der Tat

$$\vartheta(R)=\eta_1(R)+\eta_2(R).$$

In ähnlicher Weise lassen sich aus der Formel (44.) oder (45.) auch die genauen Werte der Ausdrücke $\xi_1^2(R)+\xi_2^2(R)$ und $\eta_1^2(R)+\eta_2^2(R)$ für $R=E, P, Q, A^\alpha, B^\beta$ berechnen. Da man außerdem die Werte von $\xi_1(R)+\xi_2(R)$

und $\eta_1(R)+\eta_2(R)$ kennt, so erhält man für jedes der Zahlenpaare $\xi_1(R)$ und $\xi_2(R)$ bzw. $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$ eine quadratische Gleichung. Es ergibt sich hierbei, daß für $R=E, A^a, B^b$ die Gleichungen $\xi_1(R)=\xi_2(R)$ und $\eta_1(R)=\eta_2(R)$ bestehen. Eine einfache Überlegung lehrt dann auch, in welcher Weise noch die Wurzeln der den Elementen P und Q entsprechenden quadratischen Gleichungen auf die Charaktere $\xi_1(R)$ und $\xi_2(R)$ bzw. $\eta_1(R)$ und $\eta_2(R)$ zu verteilen sind. Die auf diesem Wege berechneten Werte der 4 Charaktere sind den beiden letzten Kolonnen unserer Tabelle zu entnehmen.

Ich füge noch folgendes hinzu.

Die $\frac{s+5}{2}$ Charaktere der Tabelle, für die $\chi(F)=\chi(E)$ ist, repräsentieren zugleich, wenn je zwei Elemente R und FR als nicht von einander verschieden angesehen werden, die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{F}_s$.*)

Da ferner die Gruppe $\mathfrak{L}_s$ für $s \neq 9$ die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_s$ ist, so lehrt uns die Tabelle, daß es im ganzen $\frac{s+3}{2}$ verschiedene irreduzible Gruppen ganzer linearer Substitutionen gibt, die der Gruppe $\mathfrak{F}_s$ isomorph sind, und zwar hat man eine Gruppe des Grades s,**) $\frac{s-4-\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s+1$, $\frac{s-2+\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s-1$ und 2 Gruppen des Grades $\frac{s+\varepsilon}{2}$. Ebenso gibt es (für $s\neq 9$) im ganzen $\frac{s+3}{2}$ verschiedene irreduzible Gruppen gebrochener linearer Substitutionen, die der Gruppe $\mathfrak{F}_s$ isomorph sind, und die sich nicht als Gruppen von $\frac{s(s^2-1)}{2}$ ganzen linearen Substitutionen schreiben lassen. Unter diesen Gruppen haben $\frac{s-2+\varepsilon}{4}$ Gruppen den Grad $s+1$, $\frac{s-\varepsilon}{4}$ den Grad $s-1$ und 2 den Grad $\frac{s-\varepsilon}{2}$.

Die hier erwähnten der Gruppe $\mathfrak{F}_s$ isomorphen Gruppen der Grade $\frac{s+1}{2}$ und $\frac{s-1}{2}$ sind für den Fall $s=p$ zuerst von Herrn *Klein* aus der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen erhalten worden (Math. Ann., Bd. 15, S. 275).

---

*) Für den Fall $s=p$ sind diese Charaktere bereits von Herrn *Frobenius*, Sitzungsberichte der Berl. Akad., 1896, S. 1021, angegeben worden.

**) Diese Gruppe ergibt sich unmittelbar aus der auf S. 116 erwähnten Darstellung von $\mathfrak{F}_s$ als Permutationsgruppe von $s+1$ Symbolen.

2. *Die Gruppe* $\mathfrak{L}_s$ *für den Fall* $s = 2^n$.

Die $s(s^2-1)$ Elemente dieser Gruppe zerfallen in $s+1$ Klassen konjugierter Elemente. Setzt man nämlich, wie bei $s \equiv 1 \pmod{2}$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$$

und bezeichnet mit B irgend eine Substitution der Ordnung $s+1$ der Gruppe, so sind dies die Klassen

$$(E), (P), (A), (A^2), \ldots (A^{\frac{s-2}{2}}), (B), (B^2), \ldots (B^{\frac{s}{2}}),$$

und zwar enthält die erste dieser Klassen ein Element, die zweite s^2-1 Elemente, ferner besteht jede der $\frac{s-2}{2}$ Klassen (A^a) aus $s(s+1)$, jede der Klassen (B^b) aus $s(s-1)$ Elementen. Jede dieser Klassen stimmt mit der inversen Klasse überein.*)

Die $s+1$ Charaktere der Gruppe $\mathfrak{L}_{2^n}$ ergeben sich in ganz analoger Weise, wie die s mit $\chi^{(0)}(R), \chi^{(1)}(R), \ldots \chi^{(s-1)}(R)$ bezeichneten Charaktere der Gruppe $\mathfrak{L}_s$ für den Fall $s \equiv 1 \pmod{2}$. Man erhält folgende Tabelle:

	1	1	$\frac{s-2}{2}$	$\frac{s}{2}$
$\chi(E)$	1	s	$s+1$	$s-1$
$\chi(P)$	1	0	1	-1
$\chi(A^a)$	1	1	$\varrho^{a\alpha} + \varrho^{-a\alpha}$	0
$\chi(B^b)$	1	-1	0	$-(\sigma^{\beta b} + \sigma^{-\beta b})$.

Hier bedeuten wieder ϱ und σ primitive Einheitswurzeln der Grade $s-1$ und $s+1$. Für a und α sind die Werte $1, 2, \ldots \frac{s-2}{2}$, für b und β die Werte $1, 2, \ldots \frac{s}{2}$ zu setzen.

Da die Gruppe $\mathfrak{L}_{2^n}$ (für $2^n \neq 4$) eine abgeschlossene Gruppe ist, so ergibt sich aus unserer Tabelle, daß es im ganzen 2^n verschiedene irreduzible Gruppen gebrochener linearer Substitutionen gibt, die der Gruppe $\mathfrak{L}_{2^n}$ isomorph sind, und zwar hat man eine Gruppe des Grades 2^n, ferner $2^{n-1}-1$ Gruppen des Grades 2^n+1 und 2^{n-1} Gruppen des Grades 2^n-1. Alle

*) Vgl. *Dickson*, Linear Groups, a. a. O.

diese Gruppen lassen sich auch als Gruppen von $2^n(2^{2n}-1)$ ganzen linearen Substitutionen schreiben. Der niedrigste in Betracht kommende Grad ist gleich 2^n-1.*)

Der Ausnahmefall $s=4$ erledigt sich dadurch, daß man an Stelle der Gruppe $\mathfrak{L}_4$ die ihr isomorphe Gruppe $\mathfrak{F}_5$ betrachtet.

3. *Die Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}_s$ der Gruppe $\mathfrak{H}_s$ (s ungerade).*

Die Gruppe $\mathfrak{K}_s$, deren genaue Definition auf S. 122 gegeben worden ist, enthält, wie man ohne Mühe erkennt, Substitutionen der Ordnung $2(s-1)$ und auch solche der Ordnung $2(s+1)$. Bezeichnet man wie früher mit E, F, P die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

der Untergruppe $\mathfrak{L}_s$ von $\mathfrak{K}_s$ und mit A und B zwei Elemente der Ordnungen $2(s-1)$ und $2(s+1)$, so wird $A^{s-1}=B^{s+1}=F$, ferner zerfallen die $2s(s^2-1)$ Elemente von $\mathfrak{K}_s$ in die $2s+2$ Klassen konjugierter Elemente

$$(E), (F), (P), (FP), (A), (A^2), \dots (A^{s-2}), (B), (B^2), \dots (B^s);$$

hierbei enthalten die ersten beiden dieser Klassen je ein Element, die beiden folgenden je s^2-1 Elemente, während jede der Klassen (A^a) aus $s(s+1)$, jede der Klassen (B^b) aus $s(s-1)$ Elementen besteht. Ferner sind R und R^{-1} für jedes Element R der Gruppe einander konjugiert. Die Elemente R und FR gehören im allgemeinen verschiedenen Klassen an; eine Ausnahme bilden nur die Elemente der beiden Klassen $(A^{\frac{s-1}{2}})$ und $(B^{\frac{s+1}{2}})$. Daher hat, wie aus Formel (43.) folgt, unsere Gruppe $s+2$ (einfache) Charaktere $\chi(R)$, für die $\chi(F)=\chi(E)$ ist, und s Charaktere, für die $\chi(F)=-\chi(E)$ ist. — Außerdem besitzt die Gruppe, da ihr Kommutator $\mathfrak{L}_s$ vom Index 2 ist, außer dem Hauptcharakter $\chi^{(0)}(R)=1$ noch einen linearen Charakter $\zeta(R)$, und zwar erhält man:

---

*) Für $s=8$ ist $\mathfrak{L}_s$ die bekannte zuerst von Herrn *Cole* (American Journal, Bd. XV, S. 303) angegebene einfache Gruppe der Ordnung 504. Daß diese Gruppe sich nicht als Gruppe gebrochener linearer Substitutionen von weniger als 6 Variabeln darstellen läßt, hat bereits Herr *Wiman* (Göttinger Nachrichten, 1897, S. 62) nachgewiesen. Die Frage, ob hierzu 6 Variable genügen oder nicht, läßt Herr *Wiman* aber a. a. O. noch unentschieden; unser Resultat ergibt, daß diese Frage im bejahenden Sinne zu beantworten ist.

$$\zeta(E)=\zeta(F)=\zeta(P)=\zeta(FP)=1,$$

$$\zeta(A^a)=(-1)^a,\quad \zeta(B^b)=(-1)^b. \qquad (a=1,2,\dots s-2,\ b=1,2,\dots s)$$

Die übrigen $2s$ Charaktere der Gruppe $\mathfrak{K}_s$ lassen sich in ähnlicher Weise berechnen, wie die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{L}_s$; sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	1	1	1	1	$s-2$	s
$\chi(E)$	1	1	s	s	$s+1$	$s-1$
$\chi(F)$	1	1	s	s	$(-1)^a(s+1)$	$(-1)^\beta(s-1)$
$\chi(P)$	1	1	0	0	1	-1
$\chi(A^a)$	1	$(-1)^a$	1	$(-1)^a$	$\varrho^{a\alpha}+\varrho^{-a\alpha}$	0
$\chi(B^b)$	1	$(-1)^b$	-1	$-(-1)^b$	0	$-(\sigma^{\beta b}+\sigma^{-\beta b})$.

Hier bedeutet ϱ eine primitive Einheitswurzel des Grades $2(s-1)$ und σ eine primitive Einheitswurzel des Grades $2(s+1)$. Für die Indizes a und α sind die Werte $1,2,\dots s-2$, für b und β die Werte $1,2,\dots s$ zu setzen. Die Werte der Charaktere für die noch fehlende Klasse (FP) ergeben sich aus der Relation

$$\chi(FP)=\frac{\chi(F)}{\chi(E)}\chi(P).$$

Aus dieser Tabelle können auch unmittelbar die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{H}_s$ abgelesen werden. Man hat hierbei nur diejenigen $s+2$ Charaktere $\chi(R)$ zu berücksichtigen, für die $\chi(F)=\chi(E)$ ist, und je zwei Elemente R und FR als nicht von einander verschieden anzusehen.

Zu jedem der $2s+2$ Charaktere von $\mathfrak{K}_s$ gehört eine dieser Gruppe isomorphe irreduzible Gruppe ganzer linearer Substitutionen. Betrachtet man die diesen Gruppen entsprechenden Gruppen gebrochener linearer Substitutionen, so sind die letzteren der Gruppe $\mathfrak{H}_s$ isomorph. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß man für zwei Charaktere $\chi(R)$ und $\chi'(R)$, zwischen denen die Beziehungen

$$\chi'(R)=\zeta(R)\chi(R)$$

bestehen, wie leicht ersichtlich ist, auf dieselbe Gruppe gebrochener linearer Substitutionen geführt wird. Eine genauere Diskussion unserer Tabelle ergibt nun folgendes Resultat: Der Gruppe $\mathfrak{H}_s$ sind im ganzen $s+1$ ver-

schiedene irreduzible Gruppen gebrochener linearer Substitutionen isomorph. Hierunter hat eine den Grad s, ferner haben $\frac{s-1}{2}$ den Grad $s+1$ und $\frac{s+1}{2}$ den Grad $s-1$. Bedeutet noch ε wie früher die Zahl $(-1)^{\frac{s-1}{2}}$, so lassen sich unter diesen Gruppen die Gruppe des Grades s, ferner $\frac{s-2+\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s+1$ und $\frac{s-\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s-1$ auch als Gruppen von $s(s^2-1)$ ganzen linearen Substitutionen schreiben. Dagegen ist dies für $\frac{s-\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s+1$ und für $\frac{s+2+\varepsilon}{4}$ Gruppen des Grades $s-1$ nicht der Fall. Der kleinste in Betracht kommende Grad einer der Gruppe $\mathfrak{H}_s$ isomorphen Gruppe linearer Substitutionen ist gleich $s-1$.

Sur les séries de fonctions cylindriques.

Par M. *Niels Nielsen* à Copenhague.

Dans mon Traité des fonctions cylindriques*) j'ai exprimé, à l'aide d'une intégrale définie très simple, le produit

$$J^{\frac{n+\nu}{2}}(x) \cdot J^{\frac{n-\nu}{2}}(x),$$

où n désigne un entier non négatif, tandis que ν est une quantité finie quelconque.

Or, il est très facile de généraliser beaucoup une telle représentation intégrale, ce qui nous conduira à un principe général et très remarquable concernant les séries de fonctions cylindriques. En effet, supposons développée dans une série de fonctions cylindriques une fonction donnée $f(x)$, notre principe nous permet de déduire immédiatement pour $f(x)$ une série analogue de produits de deux fonctions cylindriques, et vice versa.

Généralisons maintenant la formule intégrale en question.

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de *Cauchy*

$$(1.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\nu-1} \cos(\varrho\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi\,\Gamma(\nu)}{2^\nu\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)},$$

où il faut admettre $\Re(\nu) > 0$, puis introduisons la série de puissances

$$(2.)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

qui a son rayon de convergence égal à r, nous aurons immédiatement, en

*) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 63; Leipzig, Teubner, 1904.

vertu de (1.) et en intégrant terme à terme, ce qui est permis, cet autre développement

$$(3.)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)\,(x\cos\varphi)^\nu \cos(\varrho\varphi)\,d\varphi \\ \quad = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s+1)\cdot a_s}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s}{2}+1\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s}, \end{cases}$$

formule qui est valable, pourvu que nous ayons à la fois $|x| < r$, $\Re(\nu) > -1$.

Appliquons ensuite l'intégrale *eulérienne* de première espèce, savoir

$$(4.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^p (\sin\varphi)^q\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)},$$

où il faut admettre $\Re(p) > -1$, $\Re(q) > -1$, le même procédé donnera cette autre formule

$$(5.)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin 2\psi)\,(x\sin 2\psi)^{\nu+1}(\cot\psi)^\varrho\, d\psi \\ \quad = \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s}{2}+1\right)a_s}{\Gamma(\nu+s+2)}\cdot(2x)^{\nu+s+1}, \end{cases}$$

qui est appliquable, pourvu que nous ayons à la fois $|x| < r$, $\Re(\nu-\varrho) > -2$.

Cela posé, combinons les deux formules (3.) et (5.), il résulte

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin 2\psi)\,(x\cos\varphi\sin 2\psi)^\nu\,(x\sin 2\psi)\cos(\varrho\varphi)\,(\cot\psi)^\varrho\, d\varphi\, d\psi$$
$$= \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s}{\nu+s+1}\cdot x^{\nu+s+1},$$

d'où immédiatement cette identité remarquable

$$(6.)\quad \begin{cases} D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin 2\psi)\,(x\cos\varphi\sin 2\psi)^\nu\,(x\sin 2\psi) \\ \qquad\qquad \cos(\varrho\varphi)\,(\cot\psi)^\varrho\, d\varphi\, d\psi = \frac{\pi}{2}\cdot f(x)\, x^\nu, \end{cases}$$

où il faut admettre à la fois $\Re(\nu) > -1$, $\Re(\nu-\varrho) > -2$.

Or, il est très facile d'étendre beaucoup la portée de la formule (6.) que nous venons de démontrer pour une fonction $f(x)$ qui est holomorphe aux environs du point $x=0$.

A cet effet, supposons que $f(x)$ soit développable dans une série *uniformément* convergente dans un domaine à une ou à deux dimensions qui contient le point $x=0$, savoir

$$(7.)\qquad f(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \cdots,$$

où toutes les fonctions $p_n(x)$ sont holomorphes aux environs du point $x=0$, nous verrons que cette autre série

$$(8.)\quad f(x\cos\varphi\sin 2\psi)(x\sin 2\psi) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s p_s(x\cos\varphi\sin 2\psi)(x\sin 2\psi)$$

est uniformément convergente dans les intervalles

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Multiplions ensuite par

$$(x\cos\varphi\sin 2\psi)^\nu \cos(\varrho\varphi)(\cot\psi)^\nu\, d\varphi\, d\psi,$$

où nous supposons à la fois $\Re(\nu) > -1$, $\Re(\nu-\varrho) > -2$, les deux membres de (8.), puis intégrons terme à terme la série ainsi obtenue, ce qui est permis, nous verrons que la formule (6.) est vraie dans ce cas plus général aussi.

Dans mon traité susdit*) je n'ai donné que le cas particulier de (6.) qui correspond à $\nu=0$.

Considérons maintenant comme exemple de la formule générale (3.) la fonction particulière

$$(9.)\qquad J^\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s},$$

il résulte immédiatement

$$(10.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^\nu(2x\cos\varphi)\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\binom{\nu+2s}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho}{2}+s+1\right)}.$$

---

*) Handbuch, p. 380.

Or, multiplions, d'après la règle de *Cauchy*, les deux séries obtenues de (9.) pour $J^a(x)$ et $J^b(x)$, nous aurons un développement de cette forme

$$(11.)\qquad J^a(x)J^b(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\binom{a+b+2s}{s}}{\Gamma(a+s+1)\Gamma(b+s+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2s},$$

ce qui donnera, en vertu de (10.), la formule élégante

$$(12.)\qquad J^{\frac{\nu+\varrho}{2}}(x)\,J^{\frac{\nu-\varrho}{2}}(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}J^\nu(2x\cos\varphi)\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi,$$

valable, pourvu que $\Re(\nu)>-1$.

On a connu, depuis longtemps, des cas particuliers de (12.);*) néanmoins cette formule générale est nouvelle, je le crois.

Remarquons en passant que la formule (12.) nous conduira directement aux équations différentielles que j'ai trouvées pour le produit de deux fonctions cylindriques.**)

Appliquons ensuite la formule intégrale de *Bessel*:

$$J^\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\omega)(\cos\omega)^{2\nu}\,d\omega,$$

valable, pourvu que $\Re(\nu)>-\frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (12.), pour le produit de deux fonctions cylindriques cette intégrale double:

$$(13.)\quad\begin{cases}J^{\frac{\nu+\varrho}{2}}(x)\,J^{\frac{\nu-\varrho}{2}}(x)=\dfrac{4x^\nu}{\sqrt{\pi^3}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x\cos\varphi\sin\psi)\\ \qquad\qquad(\cos\varphi\cos\psi)^\nu\cos(\varrho\varphi)\,d\varphi\,d\psi,\end{cases}$$

où il faut admettre $\Re(\nu)>-\frac{1}{2}$.

Combinons encore les formules (6.) et (12.), il résulte la formule

$$(14.)\quad J^\nu(x)=D_x\int_0^{\frac{\pi}{2}}J^{\frac{\nu+\varrho}{2}}\left(\frac{x\sin2\psi}{2}\right)J^{\frac{\nu-\varrho}{2}}\left(\frac{x\sin2\psi}{2}\right)\left(\frac{x\sin2\psi}{2}\right)(\cot\psi)^\varrho\,d\psi$$

qui est l'inverse de (12.).

*) loc. cit., p. 63.
**) loc. cit., p. 146.

Cela posé, considérons la série de fonctions cylindriques

$$(15.)\qquad x^{\nu} f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^{\nu}(\alpha) \cdot J^{\nu+r_s}(p_s x),$$

convergente, pourvu que x soit situé dans le domaine K qui contient le point $x=0$, mais étant du reste à une ou à deux dimensions; supposons ensuite que la série (15.) soit *uniformément* convergente par rapport à α, pourvu que cette variable soit située dans le domaine k qui contient le point $\alpha=0$.

Avec ces propriétés de la série (15.) il est évident que la série nouvelle

$$f(\alpha x \cos\varphi \sin 2\psi)(\alpha x \cos\varphi \sin 2\psi)^{\nu}(\alpha \sin 2\psi)\cos(\varrho\varphi)(\cot\psi)^{\varrho}$$
$$= 2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^{\nu}\left(\frac{\alpha \sin 2\psi}{2}\right)\left(\frac{\alpha \sin 2\psi}{2}\right)^{\nu+1}(\cot\psi)^{\varrho} \cdot J^{\nu+r_s}(2p_s x \cos\varphi)\cos(\varrho\varphi)$$

peut être intégrée terme à terme et par rapport à ψ et par rapport à φ, ce qui donnera, en vertu de (6.) et (13.), ce théorème général et très singulier:

Supposons $\Re(\nu) > -1$ *et* $\Re(\nu-\varrho) > -2$, *la série de fonctions cylindriques* (15.) *qui satisfait aux conditions susdites peut être transformée dans une série de produits de deux fonctions cylindriques comme suit*

$$(16.)\qquad x^{\nu} f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \mathfrak{A}_s^{\nu}\left(\frac{\alpha}{2}\right) J^{\frac{\nu+\varrho+\nu_s}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu-\varrho+\nu_s}{2}}(p_s x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(17.)\qquad \alpha^{\nu}\,\mathfrak{A}_n^{\nu}(\alpha) = D_\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n^{\nu}(\alpha \sin 2\psi)(\alpha \sin 2\psi)^{\nu+1}(\cot\psi)^{\varrho}\, d\psi.$$

La série (16.) *est convergente pourvu que* x *et* α *soient situés dans des domaines* K_1 *et* k_1, *obtenus en multipliant par* $\frac{1}{2}$ *et par rapport à* $x=0$ *le domaine* K *respectivement par* 2 *et par rapport à* $\alpha=0$ *le domaine* k.

Inversement prenons pour point de départ la série (16.), le même procédé nous conduira, en vertu de (6.) et (14.), à la série (15.).

Considérons maintenant quelques cas particuliers de notre théorème général.

1°. $r_s = s$, $p_s = 1$; nous obtenons les séries *neumanniennes* de première et de seconde espèce.

2°. $r_s = s,\ p_s = \nu + s$; notre théorème nous donne les séries *kapteyniennes* de première et de seconde espèce.

3°. $r_s = 0,\ p_s = s$; dans ce cas les séries de *Schlömilch* nous conduisent à des séries analogues selon des produits de deux fonctions cylindriques.

4°. $r_s = 0,\ p_s$ étant racine de l'équation $\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot J^\nu(x) = 0$; notre théorème nous conduira des séries de *Fourier* à des séries analogues selon des produits de deux fonctions cylindriques.

Or, il faut remarquer que notre théorème fondamental ne détermine pas toujours le *complet* champ de convergence de la série (16.).

En effet, il est très connu que les séries *neumanniennes* de première et de seconde espèce ont comme champ de convergence l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances qu'elles représentent.

Pour mettre en pleine lumière cette propriété des séries susdites, désignons par K et K_1 les deux domaines mentionnés dans le théorème général, puis supposons que la série

$$(18.)\qquad x^\varrho = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\nu+r_s}(p\, x)$$

soit *uniformément* convergente dans le domaine K, nous aurons

$$(2x\cos\varphi)^\varrho \cos(\sigma\varphi) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\nu+r_s}(2p_s x\cos\varphi)\cos(\sigma\varphi),$$

ce qui donnera, en vertu de (1.) et (12.), cet autre développement

$$(19.)\qquad \frac{\Gamma(\varrho+1)\,x^\varrho}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\sigma+1}{2}\right)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\frac{\nu+\sigma+r_s}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu-\sigma+r_s}{2}}(p_s x)$$

qui est certainement convergent dans le domaine K_1.

Supposons maintenant que (18.) soit une série *neumannienne* de première espèce, savoir

$$(20.)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\cdot J^{\nu+2s}(x),$$

$$(21.)\qquad \frac{\Gamma(\nu+1)\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho}{2}+1\right)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\cdot J^{\frac{\nu+\varrho}{2}+s}(x)\, J^{\frac{\nu-\varrho}{2}+s}(x);$$

dans ce cas les deux domaines K et K_1 coïncident avec la partie finie du plan des x.

Appliquons, au contraire, la série *kapteynienne* de première espèce, savoir*)

$$(22.)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \nu^2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+2s}((\nu+2s)x),$$

il résulte de même

$$(23.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu} \\ \qquad = \nu \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}} \cdot J^{\frac{\nu+\varrho}{2}+s}((\nu+2s)x)\, J^{\frac{\nu-\varrho}{2}+s}((\nu+2s)x). \end{cases}$$

Dans ce cas, où le domaine K est *fini*, il est évident que K_1 et K ne peuvent pas coïncider.

C'est la même chose avec la série de *Fourier* qui représente une seule puissance.

Considérons encore cette autre série

$$(24.)\qquad J^{\varrho}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s J^{\nu+\nu_s}(p_s x)$$

convergente dans le domaine K, le même procédé donnera une série nouvelle de la forme

$$(25.)\qquad J^{\frac{\varrho+\sigma}{2}}(x)\, J^{\frac{\varrho-\sigma}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s J^{\frac{\nu+\sigma+\nu_s}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu-\sigma+\nu_s}{2}}(p_s x)$$

qui est convergente dans le domaine K_1.

Une application de ce principe nous conduira de la série**)

$$(26.)\qquad \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\nu} J^{\nu}(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot F(\nu+s, -s, \nu+1, \alpha^2)\, J^{\nu+2s}(x),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire, à cet autre développement

*) Handbuch, p. 273.
**) loc. cit., p. 303.

$$(27.)\quad \begin{cases} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\nu} . J^{\frac{\nu+\varrho}{2}}(\alpha x) . J^{\frac{\nu-\varrho}{2}}(\alpha x) \\ = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} . F(\nu+s, -s, \nu+1, \alpha^2) J^{\frac{\nu+\varrho}{2}+s}(x) . J^{\frac{\nu-\varrho}{2}+s}(x); \end{cases}$$

les deux séries (26.) et (27.) sont convergentes dans toute l'étendue du plan.

En terminant ces recherches qui nous ont donné des propriétés très curieuses des fonctions cylindriques comme des fonctions de développement, nous avons encore à appliquer l'intégrale double qui figure au second membre de (13.); une formule générale que j'ai développée dans mon traité*) susdit donnera ici une égalité de la forme

$$(28.)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s J^{\frac{\nu+\varrho}{2}}(sx) J^{\frac{\nu-\varrho}{2}}(sx)}{(sx)^{\nu}} = \frac{4}{|x|\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \\ \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' k_s^{2\nu} \int_0^1 \frac{\cos(\varrho \arcsin k_s z)(1-z^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(1-k_s^2 z^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} dz, \end{cases}$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$ mais $\varepsilon_s = 2$, pour $s \geqq 1$, tandis que x désigne une quantité réelle, telle que, p désignant un positif entier,

$$(29.)\quad \pi\left(p-\frac{1}{2}\right) \leqq |x| < \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi;$$

de plus nous avons posé pour abréger

$$(30.)\quad k_s = \sqrt{1-\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4x^2}},$$

et l'accent fixé au signe Σ figurant au second membre indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $s=p$ si dans (29.) l'égalité a lieu dans la limite inférieure.

Dans le cas particulier, où $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, la somme de la série infinie qui figure au premier membre de (28.) est égale à zéro.

Posons particulièrement dans (28.) $\nu = 0$, $\varrho = 1$, il résulte la formule très connue

*) Handbuch p. 340.

$$(31.)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \cdot \sin(2sx) = x - \frac{x}{|x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \pi,$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \varrho = 0$ donnera la formule curieuse

$$(32.)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s (J^0(sx))^2 = \frac{4}{\pi |x|} \cdot \sum_{=1}^{s=p}{}' \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_s^2 z^2)}},$$

que j'ai développée autrefois.*)

*) loc. cit., p. 346.

Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung.

Nachtrag zu den Abhandlungen des Verfassers in Bd. 125 und Bd. 128 dieses Journals.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Die vorliegende Arbeit enthält Verallgemeinerungen der Resultate in den genannten Abhandlungen. Diese Verallgemeinerungen beziehen sich darauf, daß bei den Scharen von Nachbarkurven zu der durch Variationsrechnung gefundenen Kurve Diskontinuitäten und variable Endwerte zugelassen werden. Die von vornherein festgestellte Eigenschaft des untersuchten Integrales, wenn die gefundene Kurve gegenüber den Scharen der Nachbarkurven eintritt, welche in der Einleitung zu Abhandlung Bd. 128 dieses Journals angegeben ist, gilt alsdann um so mehr.

Sodann werden zu den in Abhandlung Bd. 125 dieses Journals untersuchten Beispielen noch andere von den gewöhnlich behandelten Beispielen hinzugefügt und nach dem in diesen Abhandlungen auseinandergesetzten Verfahren diskutiert.

1.

Die hier angestellten Untersuchungen betreffen Verallgemeinerung der Angaben in Abhandlung Bd. 125 dieses Journals Nr. 3 und Nr. 5 (vgl. Abhandlung Bd. 128 dieses Journals Nr. 1 Schluß, Nr. 3 Schluß).

In dem zu untersuchenden Integrale, Abhandlung Bd. 125 dieses Journals Nr. 1 (1.), Nr. 2 (3.), Bd. 128 dieses Journals Nr. 1 (1.),

$$(1.)\qquad \int_a^b f(x, y, y^{(1)}, \dots y^{(n)})\, dx$$

war an Stelle von y gesetzt $y+\varepsilon z$, ε eine in der Nähe von Null variierende reelle Größe, z eine reelle Funktion von x von der in den Abhandlungen Bd. 125 dieses Journals Nr. 2, Bd. 128 dieses Journals Nr. 1, Nr. 2 angegebenen Eigenschaft. Nun trat in Abhandlung Bd. 125 dieses Journals Nr. 3 an Stelle von z

$$(2.)\qquad z+\varepsilon Z,$$

wo Z eine Funktion von x und ε von der a. a. O. angegebenen Beschaffenheit ist. Hierbei war Z so eingerichtet, daß der erste und zweite Differentialquotient des Integrales (1.) nach ε für $\varepsilon=0$ wieder der vorige Ausdruck wurde, in welchem nur z in betracht kommt. Diese Eigenschaft von Z soll erhalten bleiben, dabei kann aber folgender Ausdruck von Z angewandt werden, welcher allgemeinerer Art als der in Abhandlung Bd. 125 dieses Journals Nr. 3 angegebene ist:

$$(3.)\qquad Z=(x-a)^n(x-b)^n h(x)+\varepsilon k(x, \varepsilon).$$

$h(x)$ ist eine reelle Funktion von x, welche selbst und deren n erste Ableitungen auf der Strecke von x von a bis b endlich und stetig sind. $k(x, \varepsilon)$ soll folgende Beschaffenheit haben. Die Strecke x von a bis b sei in eine endliche Anzahl Stücke geteilt. Auf jeder dieser Teilstrecken von x und für die Werte ε in der Nähe von Null seien

$$(4.)\qquad k(x, \varepsilon),\quad \frac{d^r k(x, \varepsilon)}{dx^r} \qquad (r=1, \dots n)$$

reelle endliche und stetige Funktionen von x und ε. Wenn jede dieser Funktionen durch $\varphi(x, \varepsilon)$ bezeichnet wird, so soll dieselbe Eigenschaft haben

$$(5.)\qquad \frac{d\varphi}{d\varepsilon},\quad \frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}.$$

Dann ist das Integral (1.) eine endliche und stetige Funktion von ε. Es wird der erste und zweite Differentialquotient nach ε gebildet, indem unter dem Integralzeichen differentiiert wird. Diese Differentialquotienten sind gleichfalls endliche und stetige Funktionen von ε.

Für $\varepsilon = 0$ kommt man bei dem ersten Differentialquotienten auf den Ausdruck, worin nur z auftritt. Bei dem zweiten Differentialquotienten und für $\varepsilon = 0$ kommt die Funktion $k(x, \varepsilon)$ mit ihren Differentialquotienten gleichfalls nicht in Betracht. Zu dem Ausdruck, in dem nur z auftritt, ist noch das mit 2 multiplizierte Integral addiert, in welchem unter dem Integralzeichen der Differentialausdruck, dessen Verschwinden die Funktion y bestimmt, mit $(x-a)^n (x-b)^n h(x)$ multipliziert steht. Daher verschwindet dieses Integral. Also kommt der zweite Differentialquotient für $\varepsilon = 0$ auch wieder auf den Ausdruck zurück, worin nur z sich findet.

Auf diese Weise werden auch Scharen von Nachbarkurven von y zugelassen, welche selbst oder doch in bezug auf Ableitungen nach x *Diskontinuitäten* darbieten.

Ferner ist über die Endwerte von $k(x, \varepsilon)$ für $x = a$ und b nichts vorausgesetzt. Die Endwerte von y und seinen Ableitungen nach x für $x = a$ und b brauchen dementsprechend bei dem Übergange zu den Nachbarkurven *nicht konstant zu bleiben.*

(In Abh. Bd. 125, S. 11 d. J. ist $\frac{(-1)^n}{\mathfrak{A}_n} \Psi(z)$, $\frac{(-1)^{n-1}}{\mathfrak{B}_n} \Psi_1(z_1^{(1)})$ usw. an Stelle von $\frac{1}{\mathfrak{A}_n} \Psi(z)$, $\frac{1}{\mathfrak{B}_n} \Psi_1(z_1^{(1)})$ zu setzen, da der Koeffizient der höchsten Ableitung gleich 1 werden soll; ebenso in Abh. Bd. 128, S. 36 (13.) d. J.)

2.

Zur Verallgemeinerung der Angaben in Abhandlung Bd. 125 Nr. 5 dieses Journals, die sich auf die isometrischen Aufgaben beziehen, dienen dieselben Betrachtungen wie in der vorigen Nummer.

Es kann dort in $y + \varepsilon z$ an Stelle von z auch der Ausdruck Nr. 1 (2.) gesetzt werden, worin Z der Ausdruck Nr. 1 (3.) wird. Dabei ist die Funktion $(x-a)^n (x-b)^n h(x)$ diejenige, welche in Abhandlung Bd. 125 Nr. 5 (3.) dieses Journals angegeben ist.

Beispiele.

Die in Abhandlung Bd. 125 Nr. 6 und 7 dieses Journals angegebenen Beispiele, abgesehen von dem Falle der Brachistochrone, gestatten die in den vorigen Nummern besprochenen Abänderungen bei den Nachbarkurven oder

peren Ableitungen. Bei der Brachistochrone sind jedoch die a. a. O. angegebenen Stetigkeitsbedingungen festzuhalten.

Bei den hier folgenden Beispielen werden die Bezeichnungen aus Abhandlung Bd. 125 dieses Journals angewandt.

3.

I. Kurve mit kleinstem Trägheitsmoment in bezug auf einen Punkt.

Bei Anwendung von Polarkoordinaten r, θ, wo r der Abstand des Punktes von dem Kurvenpunkte ist, $\frac{dr}{d\theta} = r^{(1)}$, $\theta_0 < \theta_1$ gesetzt wird, erhält man das Trägheitsmoment durch das Integral

$$(1.)\qquad \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + r^{(1)2}}\, d\theta$$

ausgedrückt, abgesehen von einem konstanten Faktor.

$$(2.)\quad f = r^2 \sqrt{r^2 + r^{(1)2}},\quad f'(r) = \frac{3r^3 + 2r\, r^{(1)2}}{\sqrt{r^2 + r^{(1)2}}},\quad f'(r^{(1)}) = \frac{r^2 r^{(1)}}{\sqrt{r^2 + r^{(1)2}}}.$$

Die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad f'(r) - \frac{d}{dr} f'(r^{(1)}) = 0$$

hat zum ersten Integral

$$(4.)\qquad f - f'(r^{(1)})\, r^{(1)} = c,$$

also

$$(5.)\qquad r^4 = c\sqrt{r^2 + r^{(1)2}}.$$

Hieraus

$$(6.)\qquad \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^8}{c^2} - r^2,$$

$$(7.)\qquad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\pm dr}{r\sqrt{\frac{r^6}{c^2} - 1}}.$$

Die Konstante c (5.) ist positiv. $\frac{r^6}{c^2} - 1$ ist positiv (6.) und soll größer als Null sein, ebenso sei $r > 0$. Wenn alsdann r von r_0 bis r_1 sich ändert, so soll θ in (7.) von θ_0 bis θ_1 wachsen. θ ist in einem Gebiete der komplexen Variablen r, welches die Strecke r_0 bis r_1 im Innern enthält, eine einwertige und stetige analytische Funktion von r; $\frac{d\theta}{dr}$ verschwindet dort nicht. Daher

ist die umgekehrte Funktion r in einem Streifen der komplexen Variablen θ, welcher die Strecke θ_0 bis θ_1 im Innern enthält, eine einwertige und stetige analytische Funktion von θ, für reelle θ reell.

$$(8.)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial r} = \dfrac{6r^4 + 2r^{(1)4} + 9r^2 r^{(1)2}}{(\sqrt{r^2 + r^{(1)2}})^3}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial r^{(1)}} = \dfrac{r r^{(1)}(r^2 + 2r^{(1)2})}{(\sqrt{r^2 + r^{(1)2}})^3} \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^{(1)}\,\partial r^{(1)}} = \dfrac{r^4}{(\sqrt{r^2 + r^{(1)2}})^3}. \end{array}\right.$$

Die in Abhandlung Bd. 125 S. 10 (Bd. 128 S. 37) dieses Journals in bezug auf die Funktion r und die Ausdrücke (2.) und (8.) gemachte Voraussetzung ist erfüllt; $\frac{\partial^2 f}{\partial r^{(1)}\,\partial r^{(1)}}$ ist positiv. Also ist ein Minimum vorhanden.

II. **Rotationsfläche mit geringstem Widerstande des Mediums bei Bewegung parallel der Rotationsachse.**

Die Rotationsachse sei die x-Achse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, die Ordinate y der Meridiankurve positiv, mit x wachsend, die konkave Seite der Kurve sei der x-Achse zugeneigt; φ sei der Winkel, welchen die nach innen gerichtete Normale auf dem Flächenelement Δs mit der Richtung der positiven x-Achse bildet. Die Richtung der Bewegung sei die der negativen x-Achse, v die Geschwindigkeit; für den Widerstand des Mediums senkrecht gegen das Flächenelement Δs gilt der Ausdruck $k(v\cos\varphi)^2\Delta s$, wo k eine Konstante.

Die Komponente dieses Widerstandes parallel der x-Achse ist $k(v\cos\varphi)^2\Delta s\cos\varphi$. Die Komponenten senkrecht auf der Rotationsachse heben sich weg. Bei der Reduktion der Komponenten parallel der Rotationsachse auf einen Punkt dieser Achse kommt ein resultierendes Kräftepaar nicht vor und es bleibt als resultierende Kraft $kv^2\Sigma\cos^3\varphi\,\Delta s$ ausgedehnt über die Rotationsfläche. $\operatorname{cotang}\varphi = \frac{dy}{dx}$ ist positiv, ebenso

$$(9.)\qquad \cos\varphi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ist negativ. Die Resultante des Widerstandes gegen die Rotationsfläche von $x = a$ bis b, $a < b$, wird abgesehen von dem konstanten Faktor $k\,2\pi v^2$ ausgedrückt durch

$$(10.)\qquad \int_a^b \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

$$(11.)\quad f=\frac{y\,y^{(1)3}}{1+y^{(1)2}},\; f'(y)=\frac{y^{(1)3}}{1+y^{(1)2}},\; f'(y^{(1)})=y\,y^{(1)2}\,\frac{3+y^{(1)2}}{(1+y^{(1)2})^2}.$$

Die Differentialgleichung

$$(12.)\qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)})=0$$

hat zum ersten Integral

$$(13.)\qquad f-f'(y^{(1)})\,y^{(1)}=-2c,$$

woraus

$$(14.)\qquad y=c\,\frac{(1+y^{(1)2})^2}{y^{(1)3}}.$$

Hieraus, wenn $y^{(1)}=u$ gesetzt wird,

$$(15.)\qquad x=\int\frac{dy}{u}=\int\frac{1}{u}\frac{dy}{du}\,du=c\int\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}\,du,$$

$$(16.)\qquad x=c\int\left\{\frac{1}{u}-\frac{2}{u^3}-\frac{3}{u^5}\right\}du=c\left\{\log u+\frac{1}{u^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{u^4}\right\}+c'.$$

Die Konstante c (14.) ist positiv, die Konstante c' wird durch Verschiebung des Ursprungs des Koordinatensystems in der x-Achse gleich Null. Aus

$$(17.)\qquad \frac{dx}{du}=c\,\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}$$

folgt, da $\frac{du}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ gemäß der Voraussetzung negativ ist,

$$(18.)\qquad 0<u<\sqrt{3}.$$

Die Variable u soll von u_0 bis u_1 in dem Intervalle (18.) abnehmen, c ist eine beliebige positive Konstante. Mit abnehmendem u wächst x (16.), (17.). Dem Werte u_0 entspricht $x=a$ in (16.), wo $c'=0$ ist, dem Werte u_1 entspricht $x=b$. In einem Gebiet der komplexen Variablen u, welches die Strecke u_0 bis u_1 im Innern enthält, ist x eine einwertige und stetige analytische Funktion von u; $\frac{dx}{du}$ von Null verschieden. Daher ist die umgekehrte Funktion u in einem Streifen der komplexen Variablen x, welcher die Strecke x von a bis b im Innern enthält, eine einwertige und stetige

analytische Funktion von x. Ebenso ist y (14.) für $y^{(1)} = u$, in diesem Streifen eine solche Funktion von x, für reelle x reell. $\frac{dy}{dx} = u$ (14.), (15.). $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ ist in dem Intervalle von u (18.) negativ.

$$(19.)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y^{(1)}} = y^{(1)2} \frac{3 + y^{(1)2}}{(1 + y^{(1)2})^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)} \partial y^{(1)}} = 2yy^{(1)} \frac{3 - y^{(1)2}}{(1 + y^{(1)2})^3}.$$

Die Voraussetzung aus Abhandlung Bd. 125 S. 10 (Bd. 128 S. 37) dieses Journals in bezug auf die Funktion y und die Ausdrücke (11.) und (19.) ist erfüllt; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)} \partial y^{(1)}}$ ist positiv. Es besteht ein Minimum.

III. Kleinste Fläche zwischen Kurve, Evolute und zwei Normalen.

Der Flächeninhalt wird, wenn s die Bogenlänge, r der Radius des Krümmungskreises der Kurve ist, durch

$$(20.)\qquad \frac{1}{2}\int_0^s r\, ds$$

ausgedrückt und in rechtwinkligen Koordinaten von $x = a$ bis b, $a < b$, abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{2}$ durch

$$(21.)\qquad \int_a^b \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\, dx,$$

wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ von $x = a$ bis b positiv ist, also die Kurve, deren Ordinate y positiv ist, die konvexe Seite der x-Achse zukehrt.

$$(22.)\qquad \begin{cases} f = \frac{(1 + y^{(1)2})^2}{y^{(2)}}, \quad f'(y) = 0, \quad f'(y^{(1)}) = \frac{4y^{(1)}(1 + y^{(1)2})}{y^{(2)}}, \\ f'(y^{(2)}) = -\frac{(1 + y^{(1)2})^2}{y^{(2)2}}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung

$$(23.)\qquad f'(y) - \frac{d}{dx} f'(y^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2} f'(y^{(2)}) = 0$$

hat, da $f'(y) = 0$ ist, zum ersten Integrale

$$(24.)\qquad f'(y^{(1)}) - \frac{d}{dx} f'(y^{(2)}) = c_1,$$

woraus

$$(25.)\qquad 2\frac{d}{dx}\frac{(1+y^{(1)2})^2}{y^{(2)}} = c_1 y^{(2)};$$

daher

$$(26.)\qquad \frac{(1+y^{(1)2})^2}{y^{(2)}} = \frac{c_1}{2}y^{(1)} + c_2,$$

hieraus, $y^{(1)} = u$ gesetzt,

$$(27.)\qquad (1+u^2)^2 = \left(\frac{c_1}{2}u + c_2\right)\frac{du}{dx}.$$

$$(28.)\qquad x = \int_{u_0}^{u}\frac{\frac{c_1}{2}u + c_2}{(1+u^2)^2}\,du + c_3,$$

$$(29.)\qquad y = \int u\frac{dx}{du}\,du = \int_{u_0}^{u}\frac{u\left(\frac{c_1}{2}u + c_2\right)}{(1+u^2)^2}\,du + c_4.$$

c_1 und c_2 sind reelle Konstanten. Da $\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so ist $\frac{c_1}{2}u + c_2$ (27.) positiv.

Die reelle Variable u soll von u_0 bis u_1 wachsen in einem Intervalle, wo $\frac{c_1}{2}u + c_2 > 0$ ist. $c_3 = a$, für $u = u_1$ sei $x = b$. Die Konstante c_4 ist positiv und derart, daß für u von u_0 bis u_1 $y > 0$ bleibt. x ist in einem Gebiete der komplexen Variablen u, welches die Strecke u_0 bis u_1 im Innern enthält, eine einwertige und stetige analytische Funktion von u; $\frac{dx}{du}$ von Null verschieden. Daher ist in einem Streifen der komplexen Variablen x, welcher die Strecke von a bis b im Innern enthält, u eine einwertige und stetige analytische Funktion von x. Ebenso ist y in diesem Streifen eine solche Funktion von x, für reelle x reell. $\frac{dy}{dx} = u$ (28.), (29.), $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ ist positiv.

$$(30.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(\nu)}} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}} = \frac{4(1+3y^{(1)2})}{y^{(2)}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(2)}} = -\frac{4y^{(1)}(1+y^{(1)2})}{y^{(2)2}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(2)}\partial y^{(2)}} = \frac{2(1+y^{(1)2})^2}{y^{(2)3}}. \end{cases}$$

Die Voraussetzung aus Abhandlung Bd. 125 S. 10 (Bd. 128 S. 37) dieses Journals in bezug auf die Funktion y und die Ausdrücke (22.), (30.) ist erfüllt; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(2)}\partial y^{(2)}}$ ist positiv. Es ist ein Minimum vorhanden.

Isometrische Beispiele.

Es werden die Bezeichnungen aus Abhandlung Bd. 125 Nr. 4 dieses Journals angewandt.

4.

I. Kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte bei Abgrenzung einer ebenen Fläche von gegebenem Inhalt.

In rechtwinkligen Koordinaten sei die Ordinate einer gegebenen Kurve durch $\varphi(x)$ bezeichnet. Die Bogenlänge der gesuchten Kurve, deren Ordinate y ist, wird für x von a bis b, $a < b$, durch

$$(1.)\qquad \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

gegeben. Der Inhalt der ebenen Fläche zwischen der Kurve $\varphi(x)$, der Anfangs- und Endordinate und der gesuchten Kurve y, die durch die gegebenen Endpunkte $x=a$, $y=\alpha$ und $x=b$, $y=\beta$ geht, wird durch

$$(2.)\qquad \int_a^b (y-\varphi(x))\,dx$$

ausgedrückt, wobei $y-\varphi(x)$ als positiv vorausgesetzt ist.

$$(3.)\qquad f=\sqrt{1+y^{(1)2}},\qquad f'(y)=0,\qquad f'(y^{(1)})=\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}},$$

$$(4.)\qquad F=y-\varphi(x),\qquad F'(y)=1,\qquad F'(y^{(1)})=0.$$

Die Differentialgleichung

$$(5.)\qquad Q-cS=0,$$

nämlich

$$(6.)\qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)})-c\left\{F'(y)-\frac{d}{dx}F'(y^{(1)})\right\}=0,$$

ist

$$(7.)\qquad -\frac{d}{dx}\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}}-c=0$$

und ergibt

$$(8.)\qquad \frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}}=-c(x-\xi).$$

Hieraus

$$(9.)\qquad y^{(1)} = \frac{\pm(x-\xi)}{\sqrt{R^2-(x-\xi)^2}}, \quad R^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Daher

$$(10.)\qquad y = \int \frac{\pm(x-\xi)}{\sqrt{R^2-(x-\xi)^2}}\, dx = \mp\sqrt{R^2-(x-\xi)^2} + \eta,$$

$$(11.)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R^2.$$

Es soll $R^2-(x-\xi)^2 > 0$ bleiben, also der Mittelpunkt ξ, η des Kreises (11.) durch die Endpunkte $x = a,\ y = \alpha$ und $x = b,\ y = \beta$ soll außerhalb des Streifens liegen, welcher von den Geraden durch die Endpunkte parallel der x-Achse begrenzt wird. Dann soll ein solcher Kreisbogen vorhanden sein, daß das Integral (2.) den gegebenen Wert erhält. y ist in einem Streifen der komplexen Variablen x, welcher die Strecke x von a bis b im Innern enthält, eine einwertige und stetige analytische Funktion von x.

$$(12.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}} = \frac{1}{(\sqrt{1+y^{(1)2}})^3}, \quad S = 1.$$

Die Voraussetzung aus Abhandlung Bd. 125 Nr. 4 dieses Journals in bezug auf die Funktion y und die Ausdrücke (3.), (4.), (12.) ist erfüllt; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}}$ ist positiv. Es besteht ein Minimum.

II. **In einer Vertikalebene gelegene Kurve von gegebener Länge mit kleinstem statischem Moment in bezug auf eine Horizontalebene.**

Das statische Moment einer schweren in der vertikalen xy-Ebene gelegenen homogenen starren Kurve in bezug auf die tiefer liegende Horizontalebene $y = 0$ wird bei rechtwinkligen Koordinaten, abgesehen von einem konstanten Faktor, durch

$$(13.)\qquad \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \bar{y} L$$

ausgedrückt, $a < b$, $\bar{y}$ die Ordinate des Schwerpunktes, L die Kurvenlänge

$$(14.)\qquad \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Bei dieser Aufgabe sind dieselben Integrale zu behandeln, wie bei der geometrischen Aufgabe, die in Abhandlung Bd. 125 Nr. 7 I dieses Journals

untersucht ist, wobei y positiv ist. Man erhält a. a. O. (9.) die Kettenlinie

$$(15.)\qquad y-c=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Die Diskussion ist dort angegeben. k kann positiv oder negativ sein. Zwischen $x=a$ und b soll die gegebene Länge der Kurve auf der Kettenlinie

$$(16.)\qquad Y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+{}^{-\frac{x}{k}}\right)$$

vorhanden sein und dann die Kettenlinie (15.) durch die gegebenen Endpunkte gehen.

Bei einer anderen unterhalb der Kurve gelegenen Horizontalebene erhält c in der Gleichung (15.) der Kurve einen anderen Wert. Daher hat die ursprüngliche Kurve in bezug auf jede solche Horizontalebene dieselbe Eigenschaft.

III. **Meridiankurve einer Rotationsfläche kleinsten Oberflächeninhaltes bei einem Rotationskörper, dessen Meridianschnitt gegebenen Inhalt hat.**

Die Rotationsachse sei die x-Achse in rechtwinkligen Koordinaten, die Ordinate der gesuchten Kurve y sei positiv. Der Oberflächeninhalt wird abgesehen von dem Faktor 2π durch

$$(17.)\qquad \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ausgedrückt, $a<b$, der Inhalt des Meridianschnittes durch

$$(18.)\qquad \int_a^b y\,dx.$$

$$(19.)\qquad f=y\sqrt{1+y^{(1)2}},\qquad f'(y)=\sqrt{1+y^{(1)2}},\qquad f'(y^{(1)})=\frac{y\,y^{(1)}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}},$$

$$(20.)\qquad F=y,\qquad F'(y)=1,\qquad F'(y^{(1)})=0.$$

Die Differentialgleichung

$$(21.)\qquad Q-cS=0,$$

nämlich

$$(22.)\qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)})-c\,\{F'(y)-\frac{d}{dx}F'(y^{(1)})\}=0,$$

hat zum ersten Integral

$$(23.)\qquad f(y)-f'(y^{(1)})y^{(1)}-c(F(y)-F'(y^{(1)})y^{(1)})=k,$$

also

$$(24.)\qquad y\sqrt{1+y^{(1)2}}-\frac{y\,y^{(1)2}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}}-cy=k,$$

oder

$$(25.)\qquad \frac{y}{\sqrt{1+y^{(1)2}}}=k+cy.$$

$$(26.)\qquad y^{(1)2}=\frac{y^2-(k+cy)^2}{(k+cy)^2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{y^2-(k+cy)^2}}{k+cy},$$

$$(27.)\qquad x=\int_a^y\frac{(k+cy)\,dy}{\pm\sqrt{y^2-(k+cy)^2}}+a.$$

c und k sind reelle Konstanten; $k+cy>0$ (25.).

Es soll $y>k+cy>0$ bleiben, wenn y von α bis β sich ändert, dabei x (27.) von a bis b wachsen. In einem Gebiete der komplexen Variablen y, welches die Strecke α bis β im Innern enthält, ist x einwertige und stetige analytische Funktion von y, $\frac{dx}{dy}$ von Null verschieden. Daher ist umgekehrt y in einem Streifen der komplexen Variablen x, welcher die Strecke a bis b im Innern enthält, eine einwertige und stetige analytische Funktion von x, für reelle x reell. Der Inhalt des Meridianschnittes sei alsdann gegeben.

$$(28.)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}}=\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+y^{(1)2}}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}=\frac{y}{(\sqrt{1+y^{(1)2}})^3},\quad S=1.$$

Die Voraussetzung aus Abhandlung Bd. 125 Nr. 4 in bezug auf die Funktion y und die Ausdrücke (19.), (20.), (28.) ist erfüllt; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}$ ist positiv. Es ist ein Minimum vorhanden.

Bemerkungen über symmetrische Funktionen.

Von Herrn *C. Kostka* in Insterburg.

Im 93. Bande dieses Journals habe ich von ganzen symmetrischen Funktionen der Größen $t_1, \dots t_n$ drei Formen T, K, C in Betracht gezogen, die Überführung je einer von ihnen in eine der anderen, sowie die dabei auftretenden Zahlen untersucht. Mit zwei Arten von Zahlen, die ich hier τ und $\varkappa$ nennen will, kommt man bei allen 6 Aufgaben aus und für jede Dimension läßt sich eine Quadrattafel herstellen, leicht zu konstruieren und leicht zu kontrollieren, aus der man 4 von jenen 6 Entwicklungen direkt, die beiden anderen mit geringer Mühe indirekt entnehmen kann. Neuerdings habe ich bemerkt, daß drei andere Funktionsformen $\mathfrak{T}, \mathfrak{K}, \mathfrak{C}$ sich angeben lassen, von jenen wesentlich verschieden und doch so eng mit ihnen verknüpft, daß dieselben beiden Arten von Zahlen und dieselben Tafeln nicht nur für jene 6, sondern für die 30 Aufgaben ausreichen, welche durch Zusammenstellung von je zwei der 6 Formen $T, K, C, \mathfrak{T}, \mathfrak{K}, \mathfrak{C}$ zu bilden sind. Dies soll hier dargelegt werden.

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in Band 93 dieses Journals. T ist der bekannte Typus einer homogenen ganzen symmetrischen Funktion der t; K ist irgend ein Produkt der Elementarfunktionen $c_1, \dots c_n$; C ist eine aus den Elementen c aufgebaute Determinante, bei welcher die Indizes der c in jeder Spalte um 1 höher sind als in der voraufgehenden Spalte; dabei $c_0 = 1$, $c_{-h} = c_{n+h} = 0$. Die Einzelwerte der T, K, C werden in üblicher Weise durch Indexreihen unterschieden; doch werde ich die Reihe $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ oder $1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots$ bei T oder K kurz durch (α), die ihr konjugierte durch (α') bezeichnen; ebenso (λ) und (λ') bei C. Die Indizes eines C (Diagonalreihe) sind stets nach der Größe absteigend geordnet, bei T und K ist die Ordnung

gleichgültig. Von den Indexreihen der Tafel steht entweder (I) die voran, bei der ein höherer Index die frühere Stelle hat, oder (II) die h-te Reihe ist der h-ten bei I konjugiert. $(\alpha) < (\beta)$ sagt, daß bei II (α) vor (β) steht. Die Dimensionszahl ist μ. Die Zahl n der t wird *zunächst* unbegrenzt, mindestens $= \mu$ angenommen (s. später). Wird $C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$ nach Produkten der Elemente c entwickelt, so ist $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ der Faktor von $K_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$; führt man die Entwicklung von C nach den T aus (vgl. auch Bd. 82, 216 f. dieses Journals), so ist $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ der Zahlenfaktor von $T_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$. Zum Vergleich mit Band 93 dieses Journals hat man:

$$\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} = \tau_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}^{1^{m_1} 2^{m_2} \ldots \mu^{m_\mu}} = \begin{pmatrix} m-1 & m_1 & m_2 & \ldots m_{r-1} \\ \lambda_0 - 1 & \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 & \ldots \lambda_{r-1} - 1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist $\tau_{\lambda 1 \mu - \lambda}^{1^{m_1} 2^{m_2} \ldots \mu^{m_\mu}} = \binom{m-1}{\lambda-1}$. Für $\varkappa$ war in Bd. 93 dieses Journals ein besonderes Zeichen nicht eingeführt.

Wie man vielfach die einfachsten Formen der T, d. h. die Potenzsummen s, zu Hilfe nimmt, so sollen hier die einfachsten C als Hilfsfunktionen benutzt werden. Ich setze

$$(1.) \qquad C_{111\ldots} = C_{1^r} = \mathfrak{c}_r.$$

Diese $\mathfrak{c}$ werden in der Enzyklopädie *Wronskis* Aleph-Funktionen genannt.*) Für sie kennt man folgende Gleichungen:

$$(2.) \qquad \mathfrak{c}_r - c_1 \cdot \mathfrak{c}_{r-1} + c_2 \cdot \mathfrak{c}_{r-2} \ldots + (-1)^r c_r = 0,$$

$$(3.) \qquad \mathfrak{c}_r = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{t_h^{n-1+r}}{F'(t_h)},$$

$$(4.) \qquad \mathfrak{c}_r = \sum_{(\alpha)} T_{(\alpha)},$$

$$(5.) \qquad \mathfrak{c}_r = \sum_{m=1}^{m=r} (-1)^{r-m} \cdot \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_r!} \cdot c_1^{m_1} c_2^{m_2} \ldots c_r^{m_r}.$$

Dabei ist

$$(6.) \qquad F(t) = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h c_h \cdot t^{n-h} = \prod_{h=1}^{h=n} (t - t_h).$$

Bei (4.) und (5.) erstreckt sich die Summe auf alle Glieder vom Gewicht r. In (2.) sind $r+1$ Glieder, so lange $r \leq n$, dann immer $n+1$ Glieder, weil $c_{n+h} = 0$ ist. $\mathfrak{c}_0$ ist $= c_0 = 1$.

*) Könnte man sie nicht (mit Rücksicht auf (3.)) ebensogut nach *Euler* nennen?

Die n ersten der Gleichungen (2.) bleiben unverändert, wenn jedes $\mathfrak{c}_h$ mit c_h vertauscht wird. Daraus folgt für $r \leq n$

$$(7.) \qquad c_r = \mathfrak{C}_{111\dots} = \mathfrak{C}_{1^r},$$

wenn $\mathfrak{C}$ eine Determinante ist, die aus den $\mathfrak{c}$ ebenso sich aufbaut, wie C aus den c. Aber es gilt (7.) auch für jedes größere r; doch ist bei dem Bau von $\mathfrak{C}$ *nicht* $\mathfrak{c}_{n+h}=0$ zu setzen, sondern nur $\mathfrak{c}_{-h}=0$, $\mathfrak{c}_0=1$. In der Tat wird auch $\mathfrak{C}_{1^{r+h}}=0$, weil durch Benutzung der ersten n von den Gleichungen (2.) alle Elemente der letzten Spalte Null werden.

Aus (2.) und (7.) kann man folgern:

(8.) „Die Größen $\mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_n$ bilden ein Fundamentalsystem symmetrischer Funktionen der t. Ist die betreffende symmetrische Funktion der t ganz und ganzzahlig, so ist auch ihr Ausdruck in den $\mathfrak{c}$ ganz und ganzzahlig."

Beiläufig: Die Größen $\mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_{n-1}$ bilden nicht nur mit $\mathfrak{c}_n$, sondern auch mit $\mathfrak{c}_{n+m}$, wo m je einen der Werte $1, 2, \dots n-1$ haben kann, Fundamentalsysteme. Dies folgt gleichfalls aus (2.). Ferner:

(9.) „Ist f eine rationale Funktion und $f(c_1, \dots c_n) = \varphi(\mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_n)$, so ist auch φ rational und überdies: $f(\mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_n) = \varphi(c_1, \dots c_n)$. Ist f ganz und ganzzahlig, so auch φ."

Nun bilden wir nach gleichem Gesetz wie $C_{(\lambda)}$ aus den c, Determinanten $\mathfrak{C}_{(\lambda)}$ aus den $\mathfrak{c}$; nur ist auch hier $\mathfrak{c}_{n+h}$ *nicht* $=0$ zu setzen. Also:

$$(10.) \qquad \mathfrak{C}_{(\lambda)} = \mathfrak{C}_{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} = \left| \mathfrak{c}_\lambda \, \mathfrak{c}_{\lambda+1} \dots \mathfrak{c}_{\lambda+r-1} \right|,$$

wo die h-te Zeile der Determinante aus der hingeschriebenen dadurch entsteht, daß $\lambda_{h-1}-h+1$ an die Stelle von λ tritt. Dann gilt der Satz:

(11.) „Jedes $\mathfrak{C}$ ist gleich dem C mit konjugierter Indexreihe: $\mathfrak{C}_{(\lambda)} = C_{(\lambda')}$."

Zum Beweise verwandle ich $\mathfrak{C}$ ohne Wertänderung in eine Determinante vom (λ_0+r)-ten Grade, indem ich λ_0 Zeilen oben und λ_0 Spalten vorn hinzufüge. In den ersten λ_0 Zeilen steht je eine 1 in der Diagonalreihe, sonst nur Nullen. Jede der andern r Zeilen wird durch die $\mathfrak{c}$ mit aufsteigender Reihe der Indizes ausgefüllt, und zwar stehen in der (λ_0+h)-ten Zeile die Elemente von $\mathfrak{c}_{-\lambda_0-h+1+\lambda_{h-1}}$ bis $\mathfrak{c}_{\lambda_{h-1}+r-h}$. Hier multipliziere ich die Zeilen ebenso wie die Spalten der Reihe nach mit $(-1)^0, (-1)^1, \dots (-1)^{\lambda_0+r-1}$, wodurch wieder der Wert der Determinante nicht geändert wird. In jeder Zeile wie in jeder Spalte folgen jetzt immer Glieder mit abwechselndem Vorzeichen aufeinander,

alle Diagonalglieder aber sind positiv. Von rechts her beginnend forme ich alle Spalten mit Hilfe von (2.) um. Dann stehen in den ersten λ_0 Zeilen nur Elemente c, und zwar in der h-ten Zeile die Elemente $c_{-h+1}, c_{-h+2}, \dots c_{-h+r+\lambda_0}$. In jeder der letzten r Zeilen hat man einmal 1 oder -1, dort nämlich, wo ursprünglich $\mathfrak{c}_0$ stand, sonst nur Nullen; und zwar steht in der (λ_0+h)-ten Zeile das einzige nicht verschwindende Glied in der $(\lambda_0-\lambda_{h-1}+h)$-ten Spalte und hat den Wert $(-1)^{(\lambda_0+h-1)+(\lambda_0-\lambda_{h-1}+h-1)}=(-1)^{\lambda_{h-1}}$. Alle Spalten, die in ihrem unteren Teile 1 oder -1 haben, verschiebe ich nach rechts, von rechts her beginnend die $(\lambda_0-\lambda_{h-1}+h)$-te Spalte an die (λ_0+h)-te Stelle durch λ_{h-1} Vertauschungen. Die neue Determinante vom Wert $(-1)^{\Sigma\lambda}\cdot\mathfrak{S}$ hat nun links unten in λ_0 Spalten und r Zeilen nur Nullen. Sie zerfällt also in das Produkt einer Determinante der c vom Grad λ_0 und einer anderen Determinante vom Grade r, deren Wert sich auf das Produkt der Diagonalglieder reduziert, d. h. auf $(-1)^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1}}$. Jene Determinante der c lese man umgekehrt, die letzte Spalte als erste Zeile, die letzte Zeile als erste Spalte; dann erkennt man, daß sie nichts anderes ist als $C_{(\lambda')}$. Es ist also in der Tat $\mathfrak{S}_{(\lambda)}=C_{(\lambda')}$.

Jedes $\mathfrak{S}$ ist nach den Produkten $\mathfrak{K}$ der $\mathfrak{c}$ ebenso zu entwickeln wie C nach den K; infolge des Satzes (11.) ist $C_{(\lambda)}$ durch die $\mathfrak{K}$ ebenso auszudrücken wie $C_{(\lambda')}$ durch die K. Setzt man noch

$$(12.)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{t})=\prod_{h=0}^{h=n}(-1)^h\mathfrak{c}_h\cdot\mathfrak{t}^{n-h}=\prod_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_h)$$

und bildet die Funktionstypen $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{t}_1, \dots \mathfrak{t}_n$, so ist der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{T}$ derselbe wie zwischen C und T; also entwickelt sich $C_{(\lambda')}$ nach den $\mathfrak{T}$ genau so wie $C_{(\lambda)}$ nach den T. Zwischen der Aufgabe T, C und der umgekehrten C, T kann der Übergang (nach Bd. 93 dieses Journals) durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen vermittelt werden, ebenso zwischen K, C und C, K. In gleicher Art hängt also $\mathfrak{T}, \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{C}, \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}, \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}, \mathfrak{K}$ zusammen. Mithin ist es klar, daß aus den Tafeln des Bandes 93 dieses Journals nicht nur der Zusammenhang zwischen C und T oder K, sondern auch zwischen C und $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{K}$ und ebenso der zwischen $\mathfrak{S}$ und $K, T, \mathfrak{K}, \mathfrak{T}$ direkt abgelesen werden kann.

Bei jenen Tafeln waren zur Bezeichnung der Zeilen links die Indexreihen der C so anzuordnen, daß diejenige Indexreihe voranzustellen ist, bei welcher ein höherer Index eine frühere Stelle einnimmt. Steht links $C_{(\lambda)}$,

so rechts $C_{(\lambda')}$. Oben und unten zur Bezeichnung der Spalten folgen die Indexreihen der T oder K ebenso von links nach rechts aufeinander wie rechts von oben nach unten. Dann ist gezeigt worden, daß $\tau_{(\lambda)}^{(\lambda')} = \varkappa_{(\lambda')}^{(\lambda')} = 1$, ferner daß $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha')}$ unbedingt Null ist, wenn $(\alpha') > (\lambda')$, und daß $\varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha')}$ dann stets verschwindet, wenn $(\alpha') < (\lambda')$ ist. Bezeichnen wir nun für einen Augenblick bei irgend einer Dimension die h-te Indexreihe auf der linken Seite mit (h), so haben jene Tafeln das typische Aussehen:

	$\mathfrak{K}_{(1')}$	$\mathfrak{K}_{(2')}$	$\mathfrak{K}_{(3')}$	$\mathfrak{K}_{(4')} \ldots$	
	$T_{(1')}$	$T_{(2')}$	$T_{(3')}$	$T_{(4')} \ldots$	
$C_{(1)}$	1	$\varkappa_{(1')}^{(2')}$	$\varkappa_{(1')}^{(3')}$	$\varkappa_{(1')}^{(4')} \ldots$	$C_{(1')}$
$C_{(2)}$	$\tau_{(2)}^{(1')}$	1	$\varkappa_{(2')}^{(3')}$	$\tau_{(2')}^{(4')} \ldots$	$C_{(2')}$
$C_{(3)}$	$\tau_{(3)}^{(1')}$	$\tau_{(3)}^{(2')}$	1	$\varkappa_{(3')}^{(4')} \ldots$	$C_{(3')}$
$C_{(4)}$	$\tau_{(4)}^{(1')}$	$\tau_{(4)}^{(2')}$	$\tau_{(4)}^{(3')}$	1 $\ldots$	$C_{(4')}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\ddots$	$\vdots$
	$K_{(1')}$	$K_{(2')}$	$K_{(3')}$	$K_{(4')} \ldots$	
	$\mathfrak{T}_{(1')}$	$\mathfrak{T}_{(2')}$	$\mathfrak{T}_{(3')}$	$\mathfrak{T}_{(4')} \ldots$	

Für die Bezeichnung der Zeilen und Spalten gehören *immer* zusammen links und oben, rechts und unten. Kommen T oder K in Betracht, so sind aus der Zeile oder Spalte, in welcher die gesuchte Funktion steht, die Zahlen von der 1 der Diagonale an nach der gesuchten Funktion hin zu entnehmen, bei $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{K}$ ist von der 1 der Diagonale nach der entgegengesetzten Richtung zu gehen. Nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Indexreihen könnte man auch die Formeln aufstellen:

$$(\mathrm{I^a.})\quad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} . T_{(\alpha)}; \qquad (\mathrm{I^b.})\quad T_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha)} . C_{(\lambda)}.$$

$$(\mathrm{II^a.})\quad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} . K_{(\alpha)}; \qquad (\mathrm{II^b.})\quad K_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda')}^{(\alpha)} . C_{(\lambda)}.$$

$$(\mathrm{III^a.})\quad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} \varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha)} . \mathfrak{K}_{(\alpha)}; \qquad (\mathrm{III^b.})\quad \mathfrak{K}_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} . C_{(\lambda)}.$$

$$(\mathrm{IV^a.})\quad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda')}^{(\alpha)} . \mathfrak{T}_{(\alpha)}; \qquad (\mathrm{IV^b.})\quad \mathfrak{T}_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} . C_{(\lambda)}.$$

Die Summen sind über alle Reihen (λ) oder (α) von der bestimmten Dimension auszudehnen; von selbst fallen die unnötigen Glieder durch

Verschwinden des Zahlenfaktors fort. Durch Kombination folgen hieraus die Lösungsformeln der Aufgaben TK; $T\mathfrak{K}$; $T\mathfrak{T}$; KT; $K\mathfrak{K}$; $K\mathfrak{T}$; z. B.

$$T_{(\alpha)} = \sum_{(\beta)} \Big[\sum_{(\lambda)} \big(\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda)}^{(\beta)}\big)\Big] \cdot \mathfrak{T}_{(\beta)} = \sum_{(\beta)} \Big(\sum_{(\lambda)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \varkappa_{(\lambda)}^{(\beta)}\Big) \cdot \mathfrak{K}_{(\beta)}.$$

Ferner hat man durch Vertauschung der deutschen und der lateinischen Buchstaben die Lösung von weiteren 14 Aufgaben. Nimmt man die Beziehung zwischen C und $\mathfrak{C}$ (nach (11.)) hinzu, so sind alle 30 Aufgaben erledigt.

Es seien noch die zur Kontrolle der Tafeln wichtigen oder auch zur Rechnung verwertbaren Gleichungen hervorgehoben:

$$(13^a.) \qquad \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \varkappa_{(\lambda')}^{(\beta)} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } (\alpha) = (\beta); \\ = 0, & \text{wenn } (\alpha) \neq (\beta). \end{cases}$$

$$(13^b.) \qquad \sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \varkappa_{(\varrho)}^{(\alpha)} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } (\varrho) = (\lambda'); \\ = 0, & \text{wenn } (\varrho) \neq (\lambda'). \end{cases}$$

$$(13^c) \qquad \sum_{(\alpha)}' \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } (\lambda) \text{ \textit{eine} Zahl } \mu \text{ ist}; \\ = 0, & \text{wenn } (\lambda) \text{ aus mindestens 2 Zahlen besteht.} \end{cases}$$

Die bisherigen Darlegungen gelten zunächst für den Fall, daß die Anzahl n der t nicht kleiner ist, als die Dimensionszahl μ. Wenn diese Annahme *nicht* zutrifft, so wird in den Beziehungen der C, T, K zueinander nichts geändert; wird $t_n = 0$, so verschwindet c_n, jedes T, dessen Zahl der Indizes, jedes K oder C, dessen höchster Index $> n$ ist. Bezeichnet man durch

$$(14.) \qquad \ddot{\mathfrak{C}}_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$$

diejenige Determinante, welche aus $\mathfrak{C}_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$ dadurch entsteht, daß an Stelle von $\mathfrak{c}_{n+h}$ Null gesetzt wird, so sind die Beziehungen zwischen $\ddot{\mathfrak{C}}, \mathfrak{T}, \mathfrak{K}$ ohne Einschränkung dieselben wie die zwischen C, T, K. Setzt man weiter

$$(7^a.) \qquad \ddot{c}_r = \ddot{\mathfrak{C}}_{1^r},$$

so stimmt $\ddot{c}_r$ mit c_r überein für $r = 0, 1, 2, \ldots n$; aber es ist *nicht* $\ddot{c}_{n+h} = 0$. Bedeutet ferner $\ddot{C}_{(\lambda)}$ die Determinante, welche aus den c sich aufbaut wie $\mathfrak{C}_{(\lambda)}$ aus den $\mathfrak{c}$ (vgl. (10.)), so hat man:

$$(11^a.) \qquad \ddot{\mathfrak{C}}_{(\lambda)} = \ddot{C}_{(\lambda')}.$$

Man setze also in jenen Tafeln, falls es sich um $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{K}$ handelt, $\mathfrak{c}_{n+h}=0$ und statt $C_{(\lambda)}$ entweder $C_{(\lambda)}$ oder $\mathfrak{C}_{(\lambda')}$; dann sind sie ohne Einschränkung für jedes n richtig.

Daß immerhin der Unterschied zwischen $\mathfrak{C}$ und C, der für die Tafeln von geringerer Bedeutung ist, recht wesentlich werden kann, dafür ein Beispiel. Die Geminante der Gleichung $F(t)=0$, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß entgegengesetzt gleiche Wurzeln dieser Gleichung vorhanden sind, hat den Wert:*)

$$\prod_{h,\varkappa}(t_h+t_\varkappa)=C_{n-1,\,n-2,\dots 2,1}=\mathfrak{C}_{n-1,\,n-2,\dots 2,1}.$$

Dagegen hat die Geminante von $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})=0$ den Wert:

$$\prod_{h,\varkappa}(\mathfrak{t}_h+\mathfrak{t}_\varkappa)=\mathfrak{C}_{n-1\,n-2,\dots 2,1}=C_{n-1,\,n-2,\dots 2,1}.$$

Der im Eingang erwähnte Beweis ist geliefert, der Geltungsbereich der Tafeln und Zahlen, die ich in Bd. 93 dieses Journals besprochen habe, erheblich erweitert. Zum Schluß seien noch wenige Bemerkungen über die Funktionen $F(t)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ hinzugefügt.

Der Gleichung $F(x)=0$ wird hier die andere $\mathfrak{F}(x)=0$ zugeordnet, indem aus den Koeffizienten von F diejenigen von $\mathfrak{F}$ durch (1.) zu berechnen sind. Geht man von $\mathfrak{F}$ aus, so gelangt man wieder zu F infolge von (7.). z. B. sind $x^5-2x^4+x^3-3x^2-4x+5=0$ und $x^5-2x^4+3x^3-7x^2+21x-47=0$ in diesem Sinne einander gegenseitig zugeordnet. Eine Gleichung kann sich selbst zugeordnet sein. Dabei dürfen die Größen c_{2h-1} beliebig gewählt werden, die anderen c sind aber zu bestimmen durch die Gleichungen:

$$c_{2h}=c_1.c_{2h-1}-c_2.c_{2h-2}\dots(-1)^{h-2}.c_{h-1}.c_{h+1}+(-1)^{h-1}.\frac{1}{2}c_h^2.\quad \left(h=1,2,\dots<\frac{n}{2}\right)$$

Z. B. ist $x^4+2ax^3+2a^2x^2+2bx+4ab-2a^4=0$ sich selbst zugeordnet. Bedeuten s_μ und $\mathfrak{s}_\mu$ die Potenzsummen der Wurzeln von $F(x)=0$ und $\mathfrak{F}(x)=0$, so bestehen die Gleichungen:

$$(15.)\qquad s_\mu=(-1)^{\mu-1}.\mathfrak{s}_\mu \text{ für } \mu=1,2,\dots n.$$

Sie sind charakteristisch, d. h. sie bestehen, wenn $\mathfrak{F}$ in der angenommenen Art aus F abgeleitet ist, und andererseits kann, wenn (15.) vorausgesetzt wird, nur $\mathfrak{F}(x)=0$ solche Wurzeln $\mathfrak{t}_1,\dots \mathfrak{t}_n$ haben, deren Potenzsummen $\mathfrak{s}_\mu$

*) Vgl. dieses Journal Bd. 81, S. 287.

durch (15.) mit s_μ zusammenhängen. Der Beweis von (15.) kann so geführt werden: Aus der Regel Bd. 81 dieses Journals S. 284 folgt:

$$(16.)\qquad s_\mu = C_{1\mu} - C_{21\mu-2} + C_{31\mu-3} \cdots + (-1)^{\mu-1} . C_\mu ;$$

hieraus durch Anwendung von (11.):

$$(16^a.)\qquad s_\mu = \mathfrak{S}_\mu - \mathfrak{S}_{\mu-1,1} + \mathfrak{S}_{\mu-2,1^2} \cdots + (-1)^{\mu-1} . \mathfrak{S}_{1^\mu}$$

und daraus ist für $\mu \leqq n$ die Gleichung (15.) abzulesen.

Ein anderer Beweis von (15.) wäre der folgende. Für ein beliebiges, aber hinreichend kleines x kann aus (2.), (6.) und (12.) gefolgert werden:

$$1 = \left(\sum_0^n {}_h (-1)^h c_h x^h\right) \cdot \left(\sum_0^\infty {}_h \mathfrak{c}_h x^h\right)$$

$$= \prod_1^n (1 - t_h x) \cdot (1 + \mathfrak{t}_h x) + \left(\sum_0^n {}_h (-1)^h c_h x^h\right)\left(\sum_{n+1}^\infty {}_h \mathfrak{c}_h x^h\right).$$

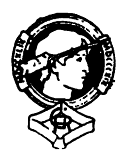
Schafft man das zweite Glied rechts nach der linken Seite, differentiiert dann logarithmisch, entwickelt nach aufsteigenden Potenzen von x und vergleicht die Koeffizienten von x, so ergibt sich (15.).

Aus (16ª.) läßt sich, indem man jede Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt, *Crocchis* Formel (Enzykl. I, S. 465) unmittelbar entnehmen. Auch *Mac Mahons* Formel (Enzykl. I, S. 459)*) läßt sich ohne Schwierigkeit nach meiner Methode beweisen. Doch fehlt hier für weitere Ausführungen der Raum.

---

*) Die vierte auf jener Seite, die dritte ist unrichtig.





BERLIN W. 35
LÜTZOWSTRASSE 107-8.

DEUTSCHE SÜDPOLAR-EXPEDITION
1901—1903

IM AUFTRAGE DES REICHSAMTES DES INNERN

Herausgegeben von **ERICH VON DRYGALSKI.**

Bis Oktober 1906 erschienen:

BAND I: TECHNIK und GEOGRAPHIE

Heft 1: **Stehr, A., Der „Gauss“ und seine technischen Einrichtungen.** Mit Tafel I—XIII und 20 Abbildungen im Text.
Preis Mark 18.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 15.—.

BAND II: KARTOGRAPHIE. GEOLOGIE

Heft 1: 1. **v. Drygalski, E., Der Gaussberg, seine Kartierung und seine Formen.** Mit Tafel I und 8 Abbildungen im Text.
2. **Philippi, E., Geologische Beschreibung des Gaussberges.** Mit Tafel II bis VII und 2 Abbildungen im Text.
3. **Reinisch, R., Petrographische Beschreibung der Gaussberg-Gesteine.** Mit Tafel VIII und 9 Abbildungen im Text.
Preis Mark 22.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 18.—.

BAND VI: ERDMAGNETISMUS BAND II

Heft 1: **Luyken, K., Das Variationshaus auf Kerguelen, seine Einrichtungen und Instrumente.** Mit Tafel I—V und 16 Abbildungen im Text.
Preis Mark 12.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 10.—.

BAND VII: BAKTERIOLOGIE, HYGIENE, SPORT

Heft 1: **Gazert, H., Proviant und Ernährung der deutschen Südpolar-Expedition 1901—1903.**
Preis Mark 7.50. Bei Subskription auf das ganze Werk M. 6.20

BAND VIII: BOTANIK

Heft 1: 1. **Hennigs, P., Die Pilze.** Mit Tafel I und II.
2. **Zahlbruckner, A., Die Flechten.** Mit Tafel III—V.
3. **Schiffner, V., Die Lebermoose.** Mit Tafel VI.
4. **Brotherus, V. F., Die Laubmoose.** Mit Tafel VII und VIII und 5 Abbildungen im Text.
5. **Schenck, H., Die Gefäßpflanzen.** Mit 10 Abbildungen im Text.
6. **Werth, E., Die Vegetation der subantarktischen Inseln.** Mit Tafel IX bis XIX und 10 Abbildungen im Text.
Preis Mark 48.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 40.—.

BAND IX: ZOOLOGIE BAND I

Heft 1: 1. **Michaelsen, W., Oligochaeten.** Mit Tafel I.
2. **Thiele, J., Leptostraken.** Mit Tafel II und 1 Abbildung im Text.
Preis Mark 8.50. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 7.—.

Heft 2: 1. **Budde-Lund, G., Die Landisopoden.** Mit Tafel III und IV.
2. **Meisenheimer, J., Die Pteropoden.** Mit Tafel V—VII.
Preis Mark 18.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 15.—.

Heft 3: **Apstein, C., Die Salpen.** Mit Tafel VIII—X und 42 Abbildungen im Text.
Preis Mark 10.—. Bei Subskription auf das ganze Werk Mark 8.40.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

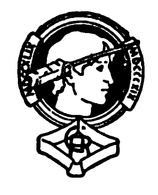
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 132.

Heft III.

Ausgegeben den 3. Juni.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1907.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 132. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über zyklische Zahlkörper.

Von Herrn *H. Weber* in Straßburg.

Vorbemerkungen.

Das Studium der schönen Arbeit von *Mertens* über zyklische Gleichungen hat mich darauf geführt, meine alten Untersuchungen über diesen Gegenstand wieder vorzunehmen.*) Es handelte sich damals und jetzt in erster Linie um den Beweis des *Kronecker*schen Satzes, daß alle *Abel*schen Zahlkörper Kreisteilungskörper sind. Ich ging damals direkt auf die Zerlegung der letzten Resolventen in ihre Primfaktoren und ihre Darstellung durch Kreisteilungszahlen aus, während *Hilbert* und *Mertens* die vollständige Induktion anwenden und so die Frage durch verschiedene Zwischenbetrachtungen auf den Fall zurückführen, daß der Grad des zyklischen Körpers eine Primzahl ist.

Hilbert stützt sich dabei einerseits auf den Satz von *Minkowski*, daß es außer dem rationalen keine algebraischen Körper mit der Diskriminante ± 1 gibt, andererseits auf die von ihm selbst entdeckten Sätze über die zu einem Primideal gehörigen Teilkörper.

Mertens schlägt denselben Weg ein, den ich damals gegangen bin, der mich aber nur für den Fall eines ungeraden Primzahlgrades zum Ziele geführt hat. Ist der Grad des Körpers eine Potenz von 2, so bot sich mir eine Schwierigkeit, die ich nur durch die Untersuchung der Klassenzahl in den Kreisteilungskörpern aus Einheitswurzeln, deren Grad eine Potenz von 2 ist, überwinden konnte.

*) Acta Mathematica Bd. 8 (1886) und in beiden Auflagen meiner Algebra (Braunschweig 1895, 1899). Ich zitiere in der Folge die zweite Auflage dieses Werkes einfach mit „Algebra". *Hilberts* Untersuchung findet sich in dem IV. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1894/95), *Mertens* Arbeit in Bd. 131 dieses Journals.

Diese Untersuchung hat zwar das an sich interessante Resultat ergeben, daß die Klassenzahl in diesen Körpern immer ungerade ist; der Weg dazu ist aber nicht nur außerordentlich weit und schwierig, sondern er hat noch den Übelstand, daß er auf den Fall eines ungeraden Grades nicht allgemein anwendbar ist, weil es nach den Untersuchungen von *Kummer* in der Tat Kreisteilungskörper gibt, in denen die Klassenzahl durch den Grad der Einheitswurzel teilbar ist.

In der folgenden Arbeit habe ich nun versucht, diese Schwierigkeit zu besiegen, indem ich mich wie *Hilbert* und *Mertens* der vollständigen Induktion bediene, übrigens aus der Theorie der algebraischen Zahlen und der *Galois*schen Theorie nur die einfacheren Sätze voraussetze. Auch der Satz von *Minkowski* wird nicht gebraucht — er kann im Gegenteil für den vorliegenden besonderen Fall auf diesem Wege bewiesen werden —. So hoffe ich, daß es mir gelungen ist, die Theorie so zu vereinfachen, daß sie sich auch auf höhere Fragen, zunächst auf die Theorie der singulären Moduln bei den elliptischen Funktionen anwenden läßt. Indessen kann ich zur Zeit hierüber noch nichts Bestimmtes sagen.

§ 1.

Zyklische Systeme und ihre Komposition.

Unter einem zyklischen System n-ten Grades (oder kurz einem Zyklus)

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

in dem der Index ν von x_ν nach dem Modul n zu nehmen ist, verstehe ich ein System von Zahlen x_ν, *deren zyklische Funktionen rational sind.*

Unter einer zyklischen Funktion ist hier eine rationale Funktion zu verstehen, die ihren Wert nicht ändert, wenn die x_ν zyklisch vertauscht werden.

Da die symmetrischen Funktionen zu den zyklischen gehören, so sind die Elemente eines zyklischen Systems jedenfalls *algebraische Zahlen.*

Ist

$$Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

ein zweites zyklisches System, so kann aus beiden ein drittes

$$Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

abgeleitet werden, indem man

$$(1.)\qquad z_\nu = \sum^{i} x_i y_{\nu-i}$$

setzt. Denn die zyklischen Funktionen der z_ν können rational durch zyklische Funktionen der x_ν und zyklische Funktionen der y_ν ausgedrückt werden. Das System Z heißt aus X und Y komponiert.*) Wir setzen symbolisch

$$(2.)\qquad Z = XY = YX.$$

Die Komposition kann beliebig wiederholt werden, und es gilt bei dieser Komposition das assoziative und das kommutative Gesetz. Wird ein zyklisches System mehrmals mit sich selbst komponiert, so bezeichnen wir dies durch Exponenten, X^h.

Unter der *Determinante* $|X|$ des Systems X verstehen wir die Determinante

$$(3.)\qquad |X| = \begin{vmatrix} x_0, & x_1, \dots, x_{n-1} \\ x_1, & x_2, \dots, x_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-1}, & x_0, \dots, x_{n-2} \end{vmatrix},$$

und aus (1.), (2.) ergibt sich nach dem Multiplikationssatz der Determinanten

$$(4.)\qquad |Z| = |X| \cdot |Y|.$$

Die Determinante $|X|$ läßt sich in lineare Faktoren zerlegen: Bezeichnen wir mit ε eine *primitive n-te Einheitswurzel* und setzen

$$(5.)\qquad L(\varepsilon^\nu, x_\mu) = x_\mu + \varepsilon^\nu x_{\mu+1} + \varepsilon^{2\nu} x_{\mu+2} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)\nu} x_{\mu+n-1},$$

so ergibt sich zunächst

$$(6.)\qquad L(\varepsilon^\nu, x_\mu) = \varepsilon^{-\mu\nu} L(\varepsilon^\nu, x_0),$$

und hieraus folgt, daß

$$(7.)\qquad L(\varepsilon, x)^n \quad \text{und} \quad L(\varepsilon^{-\nu}, x)\, L(\varepsilon, x)^\nu,$$

und allgemein jedes Produkt

*) *Kronecker*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882.

$$(8.)\qquad L(\varepsilon^{\alpha}, x)^{a}\, L(\varepsilon^{\beta}, x)^{b} \ldots,$$
$$\alpha a + \beta b + \cdots \equiv 0 \pmod{m},$$

rationale Funktionen von ε sind, wenn $\alpha, a, \beta, b \ldots$ ganze rationale Zahlen bedeuten; und durch Multiplikation von $|X|$ mit der aus den n Zeilen

$$1,\ \varepsilon^{\nu},\ \varepsilon^{2\nu}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)\nu}, \qquad (\nu=0, 1, \ldots, n-1)$$

gebildeten Determinante ergibt sich

$$(9.)\qquad |X| = L(1, x_0)\, L(\varepsilon, x_0)\, L(\varepsilon^2, x_0) \ldots L(\varepsilon^{n-1}, x_0).$$

Die Größen $L(\varepsilon^{\nu}, x_{\mu})$ heißen die *Resolventen* des zyklischen Systems X.

Wenn die Determinante $|X|$ von Null verschieden ist, so sind auch alle Resolventen von Null verschieden.

Ist die Determinante $|X|$ von Null verschieden, so kann man die Größen x'_{ν} aus dem System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \cdots + x_{n-1} x'_{n-1} &= 1,\\
x_1 x'_0 + x_2 x'_1 + \cdots + x_0 x'_{n-1} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
x_{n-1} x'_0 + x_0 x'_1 + \cdots + x_{n-2} x'_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

bestimmen und erhält ein zyklisches System

$$X^{-1} = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

das, wenn wir das zyklische System $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ mit (1) bezeichnen, der Bedingung

$$XX^{-1} = (1)$$

genügt, und die Determinante von X^{-1} ist der reziproke Wert $|X|^{-1}$ von $|X|$. Wir nennen daher X^{-1} das zu X reziproke System. Aus (2.) folgt dann

$$(10.)\qquad X = Z\,Y^{-1}.$$

Wenn die Determinanten $|X|$ und $|Y|$ nicht verschwinden, so verschwindet auch $|Z|$ nicht und man kann nach (1.) die x_{ν} rational durch die z_{ν} und y_{ν} ausdrücken.

Ein System

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

in dem die c_ν beliebige rationale Zahlen sind, gehört nach der Definition zu den zyklischen Systemen. Setzen wir

$$X' = CX,$$

so folgt, wenn die Determinante $|C|$ von Null verschieden ist,

$$X = C^{-1}X',$$

und die beiden Systeme X und X' heißen *äquivalent*.

Alle rationalen Zyklen mit nicht verschwindender Determinante sind unter einander und mit (1) äquivalent. Auch ist für jeden Zyklus X mit nicht verschwindender Determinante X^n mit (1) äquivalent.

Sind die sämtlichen x_ν eines zyklischen Systems X einander gleich, so sind sie rational und $|X|$ ist gleich Null. Es können aber auch bei nicht verschwindender Determinante mehrere unter den x_ν einander gleich sein. In dieser Beziehung gilt aber der Satz:

Jedes zyklische System mit nicht verschwindender Determinante ist mit einem System äquivalent, in dem alle Elemente von einander verschieden sind.

Setzen wir nämlich

$$x'_\nu = \sum^i c_i x_{\nu-i},$$

so folgt

$$x'_\mu - x'_\nu = \sum^i c_i (x_{\mu-i} - x_{\nu-i}),$$

und wenn die x_i nicht alle einander gleich sind, so kann keine dieser Summen identisch in bezug auf c_i verschwinden. Man kann daher für die c_i solche rationalen Zahlen setzen, daß keine dieser Summen Null wird und daß zugleich keine der Resolventen $L(\varepsilon^\nu, c_\mu)$ verschwindet.

In der Folge werden wir nur solche zyklischen Systeme betrachten, deren Grad eine Potenz einer Primzahl λ ist, und demnach

(11.) $$n = \lambda^e$$

setzen.

§ 2.

Zyklische Gleichungen.

Verstehen wir unter einer *zyklischen Gleichung* n-ten Grades eine Gleichung, deren Wurzeln $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ in der Beziehung zu einander stehen,

daß jede von ihnen *dieselbe rationale Funktion* der vorhergehenden ist,

$$(1.)\qquad x_{\nu+1} = \theta(x_\nu),$$

so bilden diese Wurzeln immer ein zyklisches System. Das umgekehrte, nämlich, daß die Elemente eines zyklischen Systems X Wurzeln einer zyklischen Gleichung sind, findet aber nur dann allgemein statt, wenn die Elemente x_ν von einander verschieden sind. Denn es ist

$$(2.)\qquad f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

eine ganze Funktion der Variablen x mit rationalen Koeffizienten, und wenn die $f'(x_\nu)$ nicht verschwinden, so hat auch

$$\Sigma \frac{x_{\nu+1} f(x)}{(x - x_\nu) f'(x_\nu)} = \theta(x)$$

rationale Koeffizienten. Setzt man darin $x = x_\nu$, so folgt die Gleichung (1.). Ist $f(x)$ reduzibel (im absoluten Rationalitätsbereich), so zerfällt es in Faktoren, deren Grade alle gleich einem und demselben Teiler von n sind, und deren Wurzeln zyklische Systeme niedrigeren Grades bilden.

Denn ist $f_0(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ vom Grade n_1; der die Wurzel x_0 hat, und ist x_m die in dem Zyklus X zunächst auf x_0 folgende Wurzel von $f_0(x)$, so sind auch x_{2m}, x_{3m}, ... Wurzeln von $f_0(x)$; denn die Gleichung $f_0(\theta^m(x)) = 0$ hat wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität von $f_0(x)$ auch x_m zur Wurzel; also ist $x_{2m} = \theta^m(x_m)$ auch Wurzel von $f_0(x)$ usf. und hierin sind *alle* Wurzeln von $f_0(x)$ enthalten. Daraus ergibt sich, daß m ein Teiler von n und $mn_1 = n$ sein muß. Setzen wir also

$$f_\nu(x) = (x - x_\nu)(x - x_{\nu+m})(x - x_{\nu+2m})\ldots(x - x_{\nu+n-m}),$$

so haben alle diese Funktionen rationale Koeffizienten und es ist

$$f(x) = f_0(x) f_1(x) \ldots f_{m-1}(x).$$

Die Systeme

$$X_\nu = (x_\nu, x_{\nu+m}, \ldots, x_{\nu+n-m})$$

sind zyklisch vom Grade n_1.

Ist $f(x)$ irreduzibel und $\lambda > 2$, so kann es nicht durch Adjunktion einer λ-ten Einheitswurzel α reduzibel werden. Denn α genügt einer irreduziblen Gleichung $(\lambda - 1)$-ten Grades. Ist daher das irreduzible $f(x)$ durch

das in α irreduzible $f(x, \alpha)$ teilbar, so ist es auch durch $f(x, \alpha^\nu)$ teilbar, worin $\nu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1$ sein kann (wegen der Irreduzibilität der Gleichung für α). Die $f(x, \alpha^\nu)$ sind aber alle von einander verschieden; denn wären zwei identisch, so wären alle identisch und $f(x, \alpha)$ wäre rational, gegen die Voraussetzung. Folglich ist $f(x)$ teilbar durch das Produkt

$$f(x, \alpha) f(x, \alpha^2) \ldots f(x, \alpha^{\lambda-1}),$$

und da dieses Produkt rational ist, so ist es auch durch das irreduzible $f(x)$ teilbar. Ist aslo n_1 der Grad von $f(x, \alpha)$, so ist $n = n_1 (\lambda - 1)$. Ist $\lambda > 2$, so ist das unmöglich, weil n eine Potenz von λ und $\lambda - 1$ durch λ nicht teilbar ist. Für $\lambda = 2$ ist $\alpha = -1$ zu setzen, und die Behauptung des Satzes wäre inhaltlos. Es ergibt sich daraus der folgende Satz, auf den wir uns im folgenden stützen, und der auch für $\lambda = 2$ gilt.

I. *Wenn die von Null verschiedene Resolvente $L(\alpha, x_0)$ gleich einer rationalen Funktion $\varphi(\alpha)$ von α ist (also für $\lambda = 2$ eine rationale Zahl), so ist $f(x)$ reduzibel.*

Denn es ist

$$L(\alpha, x_0) = \varphi(\alpha), \quad L(\alpha, x_1) = \alpha \varphi(\alpha),$$

und demnach ist die Gleichung $L(\alpha, x) - \varphi(\alpha) = 0$ zwar für $x = x_0$, nicht aber für $x = x_1$ erfüllt. Demnach ist $f(x)$ nach Adjunktion von α und folglich auch schon vor dieser Adjunktion reduzibel.

Ist $f(x)$ irreduzibel, so gibt jede Wurzel x_0 von (2.) Anlaß zu einem zyklischen Körper n-ten Grades $\mathfrak{R}(x_0)$, der aus dem Inbegriff aller rationalen Funktionen von x_0 besteht.*) Die Körper $\mathfrak{R}(x_0), \mathfrak{R}(x_1), \ldots, \mathfrak{R}(x_{n-1})$ sind mit einander identisch. Jede Zahl x_0 dieses Körpers, die n verschiedene konjugierte Werte hat, gibt denselben Körper $\mathfrak{R}(x_0)$. Wenn die Determinante des zyklischen Systems $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ nicht verschwindet, so bilden diese Größen eine *Basis* des Körpers, d. h. man kann jede Zahl desselben linear und homogen, mit rationalen Koeffizienten durch die Größen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ausdrücken.

*) Ich bezeichne, wenn ω allgemein eine algebraische Zahl ist, mit $\mathfrak{R}(\omega)$ den Inbegriff aller rationalen Funktionen von ω, wobei durch das Zeichen $\mathfrak{R}$ angedeutet sein soll, daß das Gebiet der *rationalen Zahlen* als Rationalitätsbereich gilt. Ebenso bedeutet $\mathfrak{R}(\omega, \omega' \ldots)$ den Inbegriff der rationalen Funktionen von zwei oder mehreren algebraischen Zahlen $\omega, \omega' \ldots$. Nach einem Satze von *Galois* läßt sich immer eine algebraische Zahl ϱ so bestimmen, daß $\mathfrak{R}(\omega, \omega' \ldots) = \mathfrak{R}(\varrho)$ ist.

Wir beweisen, daß man die Zahl x_0 in dem Körper $\Re(x)$ immer so auswählen kann, daß X von Null verschieden ist. (Algebra Bd. II, § 209.)

Sei also

(3.) $$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$$

irgend eine Basis von $\Re(x)$ und

$$\omega_{0,i}, \omega_{1,i}, \ldots, \omega_{n-1,i}$$

für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ die konjugierten Werte. Dann ist die Determinante $\Sigma \pm \omega_{0,0}\,\omega_{1,1} \ldots \omega_{n-1,n-1}$, deren Quadrat die Diskriminante der Basis (3.) ist, von Null verschieden und die n linearen Gleichungen

$$L(\varepsilon^\nu, \omega_{i,0}) = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,n-1)$$

können für kein ν alle zugleich bestehen. Setzen wir also

$$x_i = c_0\,\omega_{0,i} + c_1\,\omega_{1,i} + \cdots + c_{n-1}\,\omega_{n-1,i},$$

so ist

$$L(\varepsilon^\nu, x_0) = c_0\,L(\varepsilon^\nu, \omega_{0,0}) + c_1\,L(\varepsilon^\nu, \omega_{1,0}) + \cdots + c_{n-1}\,L(\varepsilon^\nu, \omega_{n-1,0})$$

und man kann über die c als rationale Zahlen so verfügen, daß von diesen n Ausdrücken keiner verschwindet. Es ist also auch die Determinante $|X|$, die gleich dem Produkt dieser Größen ist, von Null verschieden.

§ 3.

Normalkörper.

In jedem algebraischen Zahlkörper Ω, dessen Grad mit m bezeichnet sei, gibt es *primitive Zahlen*, d. h. solche Zahlen, deren konjugierte Werte alle von einander verschieden sind, und durch eine primitive Zahl x sind alle Zahlen des Körpers Ω rational ausdrückbar. Ω kann daher auch mit $\Re(x)$ bezeichnet werden. Sind die konjugierten Körper $\Re(x_1)$, $\Re(x_2), \ldots, \Re(x_m)$ alle mit einander identisch, so heißt Ω ein *Normalkörper*, oder auch ein *Galois*scher Körper. In einem solchen Körper können die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ alle rational durch eine von ihnen, x, ausgedrückt werden:

$$x_1 = \theta_1(x), \quad x_2 = \theta_2(x), \ldots, x_m = \theta_m(x),$$

und jede Zahl des Körpers geht durch jede der m Substitutionen

(1.) $$\varphi_1 = (x, x_1), \quad \varphi_2 = (x, x_2), \ldots, \varphi_m = (x, x_m)$$

in eine bestimmte Zahl desselben Körpers über. Es entstehen so die ebenfalls mit φ zu bezeichnenden *Körperpermutationen.* Diese Permutationen bilden eine Gruppe, die wir mit Φ bezeichnen und die *Gruppe des Körpers* Ω nennen.

Ist ω irgend eine Zahl in Ω, so sei mit $\omega|\varphi$ die Zahl bezeichnet, die aus ω durch die Permutation φ hervorgeht.

Hat die Gruppe Φ einen Teiler Φ' vom Grade ν, so ist ν ein Teiler von m, und es sei $m = \nu\mu$. Die Gruppe Φ läßt sich so in Nebengruppen zerlegen:

$$\Phi = \Phi'\varphi_1 + \Phi'\varphi_2 + \cdots + \Phi'\varphi_\mu. \tag{2.}$$

Man kann immer eine zu Φ' *gehörige Zahl* ξ in Ω bestimmen, d. h. eine Zahl, die durch die Permutationen von Φ' ungeändert bleibt, aber durch die μ Nebengruppen (2.) in μ *verschiedene* konjugierte Werte $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ übergeht. Diese Zahl ξ bestimmt einen algebraischen Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ vom Grade μ. Die konjugierten Körper $\mathfrak{R}(\xi_i)$ erhält man aus den Gruppen $\varphi_i^{-1}\Phi'\varphi_i$, und $\mathfrak{R}(\xi)$ ist also dann und nur dann ein Normalkörper, wenn $\Phi' = \varphi_i^{-1}\Phi'\varphi_i$ ist, d. h. wenn Φ' ein *Normalteiler* von Φ ist. *Der Körper* $\mathfrak{R}(\xi)$ *heißt der zu* Φ' *gehörige Teilkörper von* $\mathfrak{R}(x)$. Seine Gruppe besteht aus den μ Permutationen (ξ, ξ_i), wenn $\xi_i = \xi|\varphi_i$ ist.

Aus zwei Körpern $\mathfrak{R}(x)$, $\mathfrak{R}(y)$ kann man einen dritten Körper $\mathfrak{R}(x, y)$ zusammensetzen, dessen konjugierte Körper unter den $\mathfrak{R}(x_i, y_k)$ enthalten sind. Ist z eine Primitivzahl des Körpers $\mathfrak{R}(x, y)$, also $\mathfrak{R}(x, y) = \mathfrak{R}(z)$, so sind x und y rationale Funktionen von z, und wenn $\mathfrak{R}(x)$, $\mathfrak{R}(y)$ Normalkörper sind, so sind auch x_i, y_k in $\mathfrak{R}(z)$ enthalten. Folglich ist $\mathfrak{R}(z)$ auch ein *Normalkörper.*

§ 4.

Kritische Primzahlen eines Normalkörpers.

Eine natürliche Primzahl p wird in einem Normalkörper Ω vom m-ten Grade in folgender Weise in Primfaktoren zerlegt:

$$\begin{cases} p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_e)^g, \\ N(\mathfrak{p}_i) = p^f, \quad efg = m. \end{cases} \tag{1.}$$

Hier ist N das Zeichen für die *Norm*. f heißt der Grad des Primideals $\mathfrak{p}_i$; g will ich das *Gewicht* von p oder auch von $\mathfrak{p}_i$ nennen. Die drei ganzen Zahlen e, f, g sind Teiler des Körpergrades m.

Eine Primzahl, deren Gewicht größer als 1 ist, geht, wie *Dedekind* nachgewiesen hat, in der Körperdiskriminante auf, und es gibt folglich nur eine endliche Anzahl von Primzahlen, deren Gewicht in Ω größer als 1 ist. Diese heißen die *kritischen Primzahlen* des Körpers. Von ihnen gilt der von *Minkowski* bewiesene Satz:*)

Außer dem Körper der rationalen Zahlen gibt es keinen Körper, der keine kritischen Primzahlen hat.

Ist g das Gewicht eines Primideals $\mathfrak{p}$, so hat die Gruppe Φ des Körpers Ω einen Teiler X vom Grade g, dessen Permutationen χ für *jede beliebige ganze Zahl* ω des Körpers der Kongruenzbedingung genügen:

(2.) $$\omega|\chi \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Und diese Eigenschaft kommt auch *ausschließlich* den Permutationen von X zu. Die Gruppe X heißt nach *Hilbert* die *Trägheitsgruppe* des Ideals $\mathfrak{p}$.

Daraus ergeben sich folgende Sätze:

II. *Sind $\mathfrak{R}(x)$ und $\mathfrak{R}(y)$ zwei Normalkörper und p eine Primzahl, deren Gewichte in diesen beiden Körpern g_1 und g_2 sind, so ist das Gewicht g von p in dem Körper $\mathfrak{R}(x, y)$ ein Teiler von $g_1 g_2$.*

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primfaktor von p in $\mathfrak{R}(x, y)$ und $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Primideale in $\mathfrak{R}(x)$ und $\mathfrak{R}(y)$. Die Trägheitsgruppe X von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}(x, y)$ ist nach Voraussetzung vom Grade g. Sind nun φ und ψ die Permutationen von $\mathfrak{R}(x)$ und $\mathfrak{R}(y)$, so läßt sich jede Permutation von $\mathfrak{R}(x,y)$ zusammensetzen aus einer Permutation φ auf x und einer Permutation ψ auf y angewandt und kann also mit $\varphi\psi$ oder auch mit $\psi\varphi$ bezeichnet werden.

Ist $\chi = \varphi\psi$ eine Permutation der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$, so ist wegen (2.)

(3.) $$x|\chi \equiv x, \quad y|\chi \equiv y, \quad \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder was dasselbe ist,

(4.) $$x|\varphi \equiv x \pmod{\mathfrak{p}_1} \qquad y|\psi \equiv y \pmod{\mathfrak{p}_2},$$

---

*) *Minkowski*, dieses Journal Bd. 107. Geometrie der Zahlen, S. 123, 1. Algebra Bd. II, § 189. In der Folge wird von diesem Satz kein Gebrauch gemacht.

wo x, y zwei beliebige ganze Zahlen der Körper $\mathfrak{R}(x)$ und $\mathfrak{R}(y)$ sind. Sind also X_1 und X_2 die Trägheitsgruppen von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in ihren Körpern, so ist X in der Gruppe $X_1 X_2$, deren Grad $g_1 g_2$ ist, enthalten. Der Grad g von X ist also ein Teiler von $g_1 g_2$, wie bewiesen werden sollte.

Als spezielle Folgerung ergibt sich daraus, daß die Primzahl p in dem Körper $\mathfrak{R}(x, y)$ nicht kritisch sein kann, wenn sie in keinem der Komponenten $\mathfrak{R}(x)$, $\mathfrak{R}(y)$ kritisch ist.

III. *Eine Primzahl, die in einem Körper Ω nicht kritisch ist, kann in keinem Teiler Ω' von Ω kritisch sein.*

Denn ist $\mathfrak{p}'$ ein Primideal in Ω' und die natürliche Primzahl p durch $\mathfrak{p}'^g$ teilbar, so zerlege man $\mathfrak{p}'$ in Ω in seine Primfaktoren und nenne einen von ihnen $\mathfrak{p}$. Es ist dann auch p durch $\mathfrak{p}^g$ teilbar, und wenn $g > 1$ ist, so ist p auch in Ω kritisch. Das Gewicht von p *kann in Ω zwar größer aber nicht kleiner sein als in Ω'.**)

§ 5.

Kritische Primzahlen in zyklischen Körpern von Primzahlgrad.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}(\xi)$ ein zyklischer Körper vom Primzahlgrade λ und α eine imaginäre λ-te Einheitswurzel. *Jede* irrationale Zahl ξ dieses Körpers ist dann primitiv und die Resolventen $L(\alpha, \xi)$ sind alle von Null verschieden. Denn ist eine von diesen Resolventen $= 0$, so sind sie es wegen der Irreduzibilität der Gleichung für α alle, und ξ ergibt sich als rationale Zahl. Ist nun die von λ verschiedene Primzahl p im Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ kritisch und $\mathfrak{P}$ ein in p aufgehendes Primideal in diesem Körper, so ist

$$(1.)\qquad p = \mathfrak{P}^{\lambda},$$

und die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ ist mit der Gruppe des Körpers $\mathfrak{R}(\xi)$ identisch. Ist ξ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(\xi)$ und a eine rationale ganze Zahl, so ist nach § 4 (2.)

$$(2.)\qquad \xi_0 \equiv \xi_1 \equiv \cdots \equiv \xi_{\lambda-1} \equiv a \quad (\text{mod. } \mathfrak{P}),$$

und hieraus ergibt sich

$$(3.)\qquad L(\alpha, \xi) \equiv a(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{\lambda-1}) \equiv 0 \quad (\text{mod } \mathfrak{P}).$$

*) Für unseren nächsten Zweck haben nur Normalkörper und ihre Normalteiler Interesse. Der letzte Satz gilt aber allgemein für jeden Körper, wenn man unter einer kritischen Primzahl eine solche versteht, die durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist, die also in der Körperdiskriminante aufgeht.

Folglich ist $L(\alpha, \xi)^\lambda$ durch p teilbar, und diese $\lambda - 1$ Zahlen (für die verschiedenen α) sind durch *dieselbe* Potenz von p teilbar. Sei dies p^h.

Wenn nun h durch λ teilbar ist, etwa $h = \lambda m$, so ist $L(\alpha, \xi)$ durch p^m teilbar. Man setze noch die rationale Zahl $L(1, \xi) \equiv \lambda c$ mod. p^m und endlich

$$\lambda \xi_\nu \equiv \lambda c + \sum^{s} \alpha^{-\nu s} L(\alpha^s, \xi) \quad (\text{mod. } p^m).$$

Daraus folgt, daß $\xi_\nu - c$ durch p^m teilbar ist und daß also

$$\xi'_\nu = \frac{\xi_\nu - c}{p^m}$$

gesetzt werden kann, wo ξ'_ν gleichfalls eine ganze Zahl ist.

Es ist dann aber

$$L(\alpha, \xi'_\nu) = p^{-m} L(\alpha, \xi_\nu),$$

und $L(\alpha, \xi'_\nu)$ ist nicht mehr durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Damit ist bewiesen:

IV. *Eine von λ verschiedene Primzahl p ist nur dann in dem Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ kritisch, wenn die Potenzen $L(\alpha, \xi)^\lambda$ durch eine Potenz von p teilbar sind, deren Exponent nicht durch λ teilbar ist.*

Der Satz läßt sich in folgender Weise umkehren:

V. *Ist p eine von λ verschiedene Primzahl und $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal des Körpers $\mathfrak{R}(\alpha)$, ist ferner $\mathfrak{p}^h$ die höchste in $L(\alpha, \xi)^\lambda$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$ und h nicht durch λ teilbar, so ist p in $\mathfrak{R}(\xi)$ kritisch.*

Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß p im Körper $\mathfrak{R}(\alpha)$ nicht kritisch ist. (Algebra II, § 201.)

Wir zerlegen p im Körper $\mathfrak{R}(\alpha, \xi)$ in Primfaktoren und bezeichnen einen von ihnen mit π. Es gibt dann einen und nur einen Primfaktor $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}(\alpha)$, der durch π teilbar ist. Ist $\mathfrak{p}$ durch eine *höhere Potenz* von π teilbar, so ist auch p durch eine *höhere Potenz* von π teilbar, also p im Körper $\mathfrak{R}(\alpha, \xi)$ kritisch, und es muß daher p auch im Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ kritisch sein (nach Satz II).

Es sei nun $L(\alpha, \xi)$ in $\mathfrak{R}(\alpha, \xi)$ durch π^a und $L(\alpha, \xi)^\lambda$ in $\mathfrak{R}(\alpha)$ durch $\mathfrak{p}^h$ teilbar. Es ist alsdann $\mathfrak{p}^h$ durch $\pi^{a\lambda}$ teilbar, und wenn $\mathfrak{p}$ durch π^g teilbar ist, so ergibt sich $a\lambda = hg$. Ist also h nicht durch λ teilbar, so muß g durch λ teilbar sein, und mithin ist p kritisch in $\mathfrak{R}(\xi)$. Die Zahlen a, h, g sind hier immer so groß als möglich angenommen.

Dies alles gilt sowohl für ein ungerades λ als für $\lambda = 2$.

§ 6.

Die von λ verschiedenen kritischen Primzahlen.

Wir müssen nun den besonderen Fall betrachten, daß der Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ vom Grade λ Teilkörper eines zyklischen Körpers $\mathfrak{R}(x)$ vom Grade n ist, wenn n eine höhere Potenz von λ ist. Hier gilt der Satz:

VI. *Ist $\mathfrak{R}(\xi)$ ein zyklischer Körper λ-ten Grades, der als Teilkörper eines zyklischen Körpers n-ten Grades $\mathfrak{R}(x)$ aufgefaßt werden kann, und p eine von λ verschiedene in $\mathfrak{R}(\xi)$ kritische Primzahl, so ist $p-1$ durch n teilbar.*

Beim Beweis dieses Satzes unterscheiden wir verschiedene Fälle.

1. Es sei $\lambda=2$, $n>2$ und $p\equiv 1$ (mod. 3). Hier ist $(L(i,x))^4$ eine komplexe *Gauß*sche ganze Zahl, d. h. eine Zahl in $\mathfrak{R}(i)$, und p ist in diesem Körper unzerlegbar. Folglich ist $L(i,x)^4$ und $L(-i,x)^4$ durch dieselbe Potenz von p teilbar. Der Quotient

$$(1.)\qquad \frac{L(-1,x)\,L(i,x)}{L(-i,x)}$$

ist daher (§ 1, (8.)) gleichfalls eine Zahl in $\mathfrak{R}(i)$, die zwar gebrochen sein kann, deren Nenner aber nicht durch p teilbar ist. Es ist also, wenn $(L(-1,x))^2$ durch p teilbar ist, der Zähler dieses Quotienten ebenfalls durch p teilbar und $(L(-1,x))^2$ muß durch eine Potenz von p mit *geradem Exponenten* teilbar sein. Es ist aber $L(-1,x)$ gleich einem $L(-1,\xi)$ und folglich ist nach dem Satz IV die Primzahl p im Körper $\mathfrak{R}(\xi)$ nicht kritisch.

Dem Beweise in den übrigen Fällen sind folgende Bemerkungen vorauszuschicken:

Es sei ε eine primitive n-te Einheitswurzel und $\mathfrak{p}'$ ein Primideal in $\mathfrak{R}(\varepsilon)$, das in der von λ verschiedenen Primzahl p aufgeht. Es sei ferner $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{p}'$ teilbare Primideal in $\mathfrak{R}(\alpha)$.

Das Primideal $\mathfrak{p}'$ ändert sich nicht durch die Permutation $(\varepsilon, \varepsilon^p)$ oder allgemein $(\varepsilon, \varepsilon^{p^\nu})$, wenn ν ein beliebiger Exponent ist. (Algebra § 178, 201.)

Nehmen wir also jetzt den Fall

2. daß n eine ungerade Primzahl λ ist, dann ist

$$L(\alpha^p,\xi)^{-1}\,L(\alpha,\xi)^p=\omega$$

eine Zahl in $R(\alpha)$, und wenn $L(\alpha,\xi)^\lambda$ durch $\mathfrak{p}^h$ teilbar ist, so ist ω^λ durch

$h(p-1)$ teilbar. Wenn also $p-1$ nicht durch λ teilbar ist, so ist h durch λ teilbar und p in $\Re(\xi)$ nicht kritisch (nach IV).

Für den allgemeinen Fall bemerken wir, daß

$$(2.)\qquad \left(\frac{L(\varepsilon, x)}{L(\varepsilon^{p^\nu}, x)}\right)^n$$

eine gebrochene Zahl des Körpers $\Re(\varepsilon)$ ist, bei der Zähler und Nenner durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}'$ teilbar sind, und sie läßt sich also auch so darstellen, daß Zähler und Nenner durch $\mathfrak{p}'$ nicht teilbar sind. Wir nennen sie *relativ prim zu p*.

3. Für den allgemeinen Fall $n=\lambda^\varrho$ ist $\varrho>1$, und wenn $\lambda=2$ ist, können wir $\varrho>2$ annehmen, da der Fall $n=4$ durch 1. schon erledigt ist.

Ist dann $p-1$ durch λ, aber nicht durch n teilbar, so können wir setzen

$$p = 1+\lambda^{\varrho_1}\mu,$$

worin μ nicht durch λ teilbar und $\varrho_1<\varrho$ ein positiver Exponent ist, und $\varrho_1>1$ für $\lambda=2$. Nach dem binomischen Lehrsatz ergibt sich dann

$$p^\lambda = 1+\lambda^{\varrho_1+1}\mu',$$
$$p^{\lambda^2} = 1+\lambda^{\varrho_1+2}\mu'',$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

und endlich findet sich ein Exponent ν, der eine Potenz von λ ist, so daß

$$p^\nu = 1+\frac{n}{\lambda}\mu,$$

worin μ nicht durch λ teilbar ist. Es ist also

$$\varepsilon^{p^\nu} = \alpha\varepsilon,$$

wo $\alpha=\varepsilon^{\frac{n}{\lambda}}$ eine primitive λ-te Einheitswurzel ist.

Daraus folgt nun nach (2.), daß

$$(3.)\qquad \left(\frac{L(\alpha, x)\,L(\varepsilon, x)}{L(\alpha\varepsilon, x)}\right)^\lambda,$$

was die λ-te Potenz einer Zahl in $\Re(\alpha)$ ist, durch keine andere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar sein kann als $L(\alpha, x)^\lambda$, und es ergibt sich wie vorhin, daß p in $\Re(\xi)$ nicht kritisch sein kann.

Hierdurch ist das Theorem VI bewiesen.

Der Körper der p-ten Einheitswurzel r, $\mathfrak{R}(r)$, ist ein zyklischer vom Grade $p-1$. In ihm ist nur die Primzahl p selbst kritisch vom Gewicht $(p-1)$ (Algebra Bd. II, § 199). Ist $p-1$ durch n teilbar, so hat $\mathfrak{R}(r)$ einen zyklischen Teilkörper $\mathfrak{R}(y)$ vom Grade n, in dem ebenfalls keine von p verschiedene Primzahl kritisch sein kann.

Im Körper $\mathfrak{R}(y)$ aber ist p kritisch vom Gewicht n. Denn setzen wir $1-r=\sigma$, so ist p, von Einheitsfaktoren abgesehen, die $(p-1)$-te Potenz von σ.

Ist nun $p-1=ne$, so ist

$$(4.)\qquad \sigma'=\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_e=\sigma^e$$

in $\mathfrak{R}(y)$ enthalten, wenn σ_i die Zahlen sind, die durch die Permutationen der Gruppe, zu der y gehört, aus σ hervorgehen. Ist nun $p=\sigma'^g$, so ist $eg=p-1$, also $g=n$; σ' muß aber ein Primideal in $\mathfrak{R}(y)$ sein. Denn ein in p aufgehendes Primideal des Körpers $\mathfrak{R}(y)$ muß jedenfalls eine Potenz von σ sein, etwa σ^k. Sein Gewicht in $\mathfrak{R}(y)$ ist dann $(p-1)$: $k\leqq n$, folglich $k\geqq e$. Andererseits kann aber k nach (4.) nicht größer als e sein, also $k=e$.

Der in $\mathfrak{R}(y)$ enthaltene Körper λ-ten Grades sei $\mathfrak{R}(\eta)$*).

Man wähle ein zyklisches System $Y=(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ im Körper $\mathfrak{R}(y)$, dessen Determinante von Null verschieden ist. Dann ist nach dem Satze § 5, IV $L(\alpha, y)^\lambda$ durch p^a teilbar, und a *nicht* durch λ teilbar.

Nun bilde man nach § 1 für einen unbestimmten Exponenten die Zusammensetzung:

$$XY^\nu=Z=(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

woraus folgt:

$$(5.)\qquad L(\alpha, z)=L(\alpha, x)\,L(\alpha, y)^\nu.$$

Ist p in $\mathfrak{R}(\xi)$ kritisch, so ist $L(\alpha, x)^\lambda$ durch eine Potenz von p etwa p^b teilbar und man kann ν aus der Kongruenz

$$a\nu+b\equiv 0 \pmod{\lambda}$$

bestimmen. Es ist alsdann p in $\mathfrak{R}(z)$ nicht mehr kritisch (§ 5, IV) und die x_i können durch die y_i und die z_i rational dargestellt werden.

So verfahre man mit allen in $\mathfrak{R}(\xi)$ kritischen von λ verschiedenen Primzahlen, und es ergibt sich der Satz:

*) Für die y kann man die *Gaußschen* Perioden der p-ten Einheitswurzeln nehmen. Es kommt aber darauf hier nicht an.

VII. *Die weitere Untersuchung über den Kroneckerschen Satz kann sich auf den Fall beschränken, daß in dem Teilkörper λ-ten Grades $\mathfrak{R}(\xi)$ von $\mathfrak{R}(x)$ nur noch λ kritisch ist.*

§ 7.

Zyklische Körper vom Grade 2^ϱ.

Jetzt ist der Beweis des *Kronecker*schen Satzes für den Fall $\lambda = 2$ leicht zu führen. Zunächst sei bemerkt, daß die Wurzeln einer zyklischen Gleichung alle reell sind, wenn eine von ihnen reell ist. Eine zyklische Gleichung von ungeradem Grade hat daher immer reelle Wurzeln. Ist aber $n = 2^\varrho$, so sind entweder alle Wurzeln reell oder alle imaginär, und zwar paarweise konjugiert imaginär.

Ist aber x_0 konjugiert imaginär mit x_ν, so ist auch x_ν konjugiert imaginär mit $x_{2\nu}$, also $x_{2\nu} = x_0$ und $2\nu = n$. Daraus folgt, wenn $n > 2$ ist, daß $L(-1, x)$ reell ist, und

(1.) $$L(-1, x)^2 = Q$$

ist eine *positive ganze rationale Zahl* (falls x ganzzahlig gewählt ist).

Nach § 6 nehmen wir nun an, daß in $\mathfrak{R}(x)$ keine Primzahl außer 2 kritisch sei. Dann ist Q entweder ein Quadrat P^2 oder das Doppelte eines Quadrates $2P^2$. Im ersten Fall wäre $L(-1, x) = \pm P$, und $\mathfrak{R}(x)$ wäre nach § 2, I höchstens vom Grade $\frac{n}{2}$.

Ist aber

(2.) $$L(-1, x)^2 = 2P^2,$$

so brauchen wir eine weitere Komposition.

Wenn ϱ eine $2n$-te Einheitswurzel ist, so ist, wie aus der Kreisteilungstheorie bekannt, $\mathfrak{R}(\varrho)$ ein zyklischer Körper n-ten Grades mit der einzigen kritischen Primzahl 2. Nehmen wir in diesem Körper ein zyklisches System Y mit nicht verschwindender Determinante,*) so ist

(3.) $$L(-1, y)^2 = 2A^2,$$

wo A eine ganze rationale Zahl ist. (Wäre nämlich $L(-1, y)^2 = A^2$, so

*) *Mertens* bildet in Art. 4 der erwähnten Arbeit tatsächlich ein solches System. Es genügt hier, zu wissen, daß es existiert.

würde folgen, daß $R(y)$ von niedrigerem als dem n-ten Grade wäre, was der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung widerspricht.)

Bilden wir also die Komposition

$$Z = XY,$$

so folgt aus (2.) und (3.)

$$L(-1, z) = L(-1, x)\, L(-1, y) = \pm 2AP.$$

Folglich ist der Körper $\mathfrak{R}(z)$ höchstens vom Grade $2^{\lambda-1}$.

Nehmen wir also als bereits erwiesen an, daß ein zyklischer Körper vom Grade $2^{\lambda-1}$ ein Kreisteilungskörper sei, und beachten, daß jeder quadratische Körper ein Kreisteilungskörper ist, so folgt der *Kronecker*sche Satz für diesen Fall durch vollständige Induktion allgemein.

§ 8.

Ideale im Körper $\mathfrak{R}(\alpha)$.

Ganz so läßt sich nicht mehr schließen im allgemeinen Fall eines ungeraden λ, weil wir da mit den Idealen des Körpers zu rechnen haben.*) Ich werde hier denselben Weg gehen, den ich in meinen früheren Arbeiten eingeschlagen habe, nur daß sich hier, wo es sich um einen Primzahlgrad handelt, alles wesentlich vereinfacht. Auch *Mertens* bedient sich ähnlicher Hilfsmittel.

Es bedeute also α eine λ-te Einheitswurzel und c eine primitive Wurzel von λ.

Dann ist

$$A = (\alpha, \alpha^c, \alpha^{c^2}, \ldots, \alpha^{c^{\lambda-2}})$$

ein zyklisches System $(\lambda - 1)$-ten Grades. Jede Zahl und jedes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers $\mathfrak{R}(\alpha)$ geht durch die Substitution (α, α^ν) in ein bestimmtes anderes über, das mit $\mathfrak{a}_\nu$ bezeichnet werde. $(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine ganze oder gebrochene *wirklich existierende Zahl* des Körpers $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist. Ich deute die Äquivalenz durch das Zeichen

(1.) $$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$$

*) Es würde sich ebenso schließen lassen in den Fällen, wo der Körper $\mathfrak{R}(\alpha)$ einklassig ist, wie z. B. bei $\lambda = 3$.

an. Jede Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist mit 1 äquivalent, und ein Ideal, das mit 1 äquivalent ist, heißt ein *Hauptideal.*

Die Zahl λ selbst ist die $(\lambda-1)$-te Potenz eines Hauptideals σ. Man kann

$$(2.)\qquad \sigma = 1 - \alpha$$

annehmen. Die verschiedenen σ_ν unterscheiden sich nur durch *Einheitsfaktoren.*

Wenn eine von λ verschiedene Primzahl p zum Exponenten f gehört, d. h. wenn f der kleinste positive Exponent ist, für den $p^f \equiv 1$ (mod. λ) ist, so ist f ein Teiler von $\lambda - 1$. Wir setzen

$$(3.)\qquad \lambda - 1 = ef,$$

und p zerfällt in e verschiedene Primideale f-ten Grades, die so bezeichnet werden können:

$$(4.)\qquad p = \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_c\, \mathfrak{p}_{c^2} \dots \mathfrak{p}_{c^{e-1}}.$$

Ist $p-1$ durch λ teilbar, so ist $f=1$ und $e=\lambda-1$, und p zerfällt in $\lambda-1$ Primideale ersten Grades und es ist

$$(5.)\qquad p = \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{\lambda-2}.$$

Die Bezeichnung der Primideale werde nun in diesem Falle in folgender Weise festgesetzt: Da die Primideale $\mathfrak{p}$ hier vom ersten Grade sind, so ist jede Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$ nach $\mathfrak{p}$ mit einer rationalen Zahl kongruent, und wir definieren $\mathfrak{p}_1$ dadurch, daß

$$(6.)\qquad \alpha \equiv a \pmod{\mathfrak{p}_1}$$

wird. Da $\alpha^\lambda = 1$ ist, so folgt hieraus $a^\lambda \equiv 1$ (mod. p), und aus (6.) ergibt sich

$$\alpha^\nu \equiv a \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

oder, wenn ν' durch die Kongruenz

$$(7.)\qquad \nu\nu' \equiv 1 \pmod{\lambda}$$

bestimmt wird,

$$\alpha \equiv a^{\nu'} \pmod{\mathfrak{p}_\nu}.$$

Ist nun r eine primitive p-te Einheitswurzel, so ist nach einem Theorem von *Kummer**)

$$(8.)\qquad L(\alpha, r)^\lambda = \overset{\nu}{\Pi}\, \mathfrak{p}_\nu^{\nu'},$$

*) *Kummer,* Abhandlungen der Berliner Akademie 1856. Algebra II, § 202, 203.

worin sich ν auf die Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ erstreckt und für ν' die kleinste positive Lösung der Kongruenz (7.) zu nehmen ist. Die linke Seite von (8.) ist aber eine Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$, und wir erhalten also für den Fall, daß $p \equiv 1 \pmod{\lambda}$ ist:

$$(9.) \qquad \overset{\nu}{\Pi}\, \mathfrak{p}_\nu^{\nu'} \backsim 1.$$

Hierauf leiten wir das folgende Theorem ab:

VIII. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal des Körpers* $\mathfrak{R}(\alpha)$, *das den beiden Bedingungen*

$$(10.) \qquad \mathfrak{a}^\lambda \backsim 1,$$

$$(11.) \qquad \mathfrak{a}_\nu \backsim \mathfrak{a}^\nu$$

genügt, so ist

$$\mathfrak{a} \backsim 1.$$

Hierin bedeutet ν eine durch λ nicht teilbare Zahl. Beim Beweise können wir $\mathfrak{a}$ durch irgend ein äquivalentes Ideal ersetzen und daher, da in jeder Idealklasse Ideale vorkommen, die zu einem gegebenen Ideal relativ prim sind, $\mathfrak{a}$ teilerfremd zu λ annehmen. (Algebra II, § 170, 6.) Nun bilden wir das Produkt

$$(12.) \qquad \Pi\, \mathfrak{a}_\nu^{\nu'} \backsim \mathfrak{b},$$

worin wir nach (9.) annehmen können, daß $\mathfrak{b}$ kein Primideal $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade mehr enthält. Andererseits ist wegen (7.) und (11.)

$$\Pi\, \mathfrak{a}_\nu^{\nu'} \backsim \mathfrak{a}^{\lambda-1},$$

also nach (12.)

$$(13.) \qquad \mathfrak{a}^{\lambda-1} \backsim \mathfrak{b},$$

und $\mathfrak{b}$ genügt denselben Bedingungen (10.), (11.) wie $\mathfrak{a}$. Ist f irgend ein Teiler von $p-1$, größer als 1 und $p-1 = ef$, so bilde man das Produkt

$$\mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_c\, \mathfrak{b}_{c^2} \ldots \mathfrak{b}_{c^{e-1}} \backsim \mathfrak{c},$$

und darin kann man wegen (4.) und (9.) $\mathfrak{c}$ frei von Primidealen ersten und f-ten Grades annehmen. Aus (13.) aber ergibt sich

$$(14.) \qquad \mathfrak{c} \backsim \mathfrak{a}^{(\lambda-1)(1+c+c^2+\cdots+c^{e-1})} \backsim \mathfrak{a}^{(\lambda-1)\frac{c^e-1}{c-1}},$$

und $\frac{c^e-1}{c-1}$ ist durch λ nicht teilbar. Um die Primideale f'-ten Grades weg-

zuschaffen, verfährt man ebenso und findet, daß

$$\mathfrak{a}^{(\lambda-1)\frac{c^e-1}{c-1}\frac{c^{e'}-1}{c-1}}$$

äquivalent ist mit einem Ideal, das keine Primideale 1-ten, f-ten und f'-ten Grades enthält. Auf diese Weise ergibt sich ein *durch* λ *unteilbarer* Exponent μ, für den

$$\mathfrak{a}^{\mu} \sim 1.$$

Bestimmt man nun a und b so, daß

$$a\lambda + b\mu = 1$$

wird, so erhält man

(15.) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\lambda a}\, \mathfrak{a}^{\mu b} \sim 1,$$

wie bewiesen werden sollte.

IX. *Ist* ε *eine Einheit des Körpers* $R(\alpha)$, *die der Bedingung genügt, daß*

(16.) $$\varepsilon_{-1}\, \varepsilon_1 = \mathfrak{E}^{\lambda}$$

die λ*-te Potenz einer Einheit in* $\Re(\alpha)$ *ist, so ist* ε *selbst eine* λ*-te Potenz einer Einheit in* $\Re(\alpha)$, *multipliziert mit einer Potenz von* α.

Der Beweis ergibt sich so: Nach einem Satze von *Kronecker* (dieses Journal Bd. 53, Algebra II, § 207) ist jede Einheit ε in $\Re(\alpha)$ in der Weise darstellbar:

(17.) $$\varepsilon = \alpha^h e(\alpha),$$

worin $e(\alpha) = e(\alpha^{-1})$ eine *reelle Einheit* ist. Es folgt dann aus (16.)

$$e(\alpha)^2 = \mathfrak{E}^{\lambda}.$$

und daraus:

$$e(\alpha) = e(\alpha)^{\lambda}\, e(\alpha)^{1-\lambda} = \left(e(\alpha)\, \mathfrak{E}^{\frac{1-\lambda}{2}}\right)^{\lambda},$$

worin nach (17.) der Beweis von IX liegt.*)

*) Die beiden Sätze VIII und IX sind für eine beliebige Potenz der ungeraden Primzahl λ in Algebra II, § 211, 212 abgeleitet. Sie beweisen für diesen Fall *unmittelbar* den *Kronecker*schen Satz.

§ 9.

Zyklische Körper von ungeradem Grade.

Durch diese beiden Sätze ist nun der Weg geebnet, um den Fall eines ungeraden λ ganz in derselben Weise wie den Fall $\lambda = 2$ zu erledigen. Nach VII, § 6 nehmen wir einen zyklischen Körper $\mathfrak{R}(x)$ vom n-ten Grade, in dessen Teilkörper $\mathfrak{R}(\xi)$ vom λ-ten Grade nur noch die Primzahl λ kritisch ist.

Sind nun $L(\alpha, \xi)$ oder, was dasselbe ist, $L(\alpha, x)$ die Resolventen von $\mathfrak{R}(\xi)$, so ist

$$(1.) \qquad L(\alpha^{-\nu}, \xi)\, L(\alpha, \xi)^{\nu} = \vartheta(\alpha)$$

eine Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$, und wenn daher $L(\alpha, \xi)^{\lambda}$ durch eine Potenz σ^{h} des in λ enthaltenen Primideals σ teilbar ist, so muß $\vartheta(\alpha)^{\lambda}$ durch $\sigma^{h(\nu-1)}$ teilbar sein. Der Exponent $h(\nu-1)$ ist also durch λ teilbar, und da ν beliebig ist, so ist h durch λ teilbar. Hieraus ergibt sich:

X. *Jedes in $L(\alpha, \xi)^{\lambda}$ enthaltene Primideal ist darin zu einer Potenz erhoben, deren Exponent durch λ teilbar ist.*

Wir können also, indem wir mit $\mathfrak{a}$ ein Ideal des Körpers $\mathfrak{R}(\alpha)$ bezeichnen, symbolisch setzen:

$$(2.) \qquad L(\alpha, \xi)^{\lambda} = \mathfrak{a}^{\lambda}.$$

Wegen (1.) genügt aber dieses Ideal $\mathfrak{a}$ den beiden Bedingungen (10.), (11.) des Satzes VIII und ist somit ein *Hauptideal.* Es gibt also eine Einheit ε und eine Zahl $\varphi(\alpha)$ in $R(\alpha)$, so daß

$$(3.) \qquad L(\alpha, \xi)^{\lambda} = \varepsilon\varphi(\alpha)^{\lambda},$$

und die Einheit ε genügt hier wieder der Bedingung des Satzes IX, und wir können daher setzen:

$$(4.) \qquad L(\alpha, \xi)^{\lambda} = \alpha^{h}\,\theta(\alpha)^{\lambda},$$

worin h irgend ein ganzzahliger Exponent und $\theta(\alpha)$ eine Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist. Wenn nun h durch λ teilbar ist, so ist $L(\alpha, \xi)$ selbst in $\mathfrak{R}(\alpha)$ enthalten, und $\mathfrak{R}(x)$ ist von niedrigerem Grade als n (nach § 2, I). Im allgemeinen müssen wir noch den Körper $\mathfrak{R}(r)$ zu Hilfe nehmen, der aus den Einheitswurzeln r vom Grade $n\lambda = \lambda^{e+1}$ entsteht. Dieser Körper ist wegen der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung vom Grade $n(\lambda-1)$, und in ihm ist *nur die Primzahl* λ

kritisch. Es ist aber in $\mathfrak{R}(r)$ ein zyklischer Körper $\mathfrak{R}(y)$ vom Grade n enthalten, in dem also auch nur λ kritisch ist. Daher ist nach (4.), wenn $\vartheta(\alpha)$ wieder eine Zahl in $\mathfrak{R}(\alpha)$ ist:

$$(5.) \qquad L(\alpha, y)^{\lambda} = \alpha^{a}\, \vartheta(\alpha)^{\lambda},$$

und der Exponent a ist hier nicht durch λ teilbar, weil sonst $\mathfrak{R}(y)$ von niedrigerem als dem n-ten Grade wäre. Bilden wir also wieder

$$(6.) \qquad Z = X\, Y^{t},$$

so wird

$$L(\alpha, z) = L(\alpha, x)\, L(\alpha, y)^{t}.$$

Dabei kann man t so bestimmen, daß $at + h \equiv 0$ (mod. λ) wird. Dann ist aber $L(\alpha, z)$ in $\mathfrak{R}(\alpha)$ enthalten und $\mathfrak{R}(z)$ ist reduzibel.

Hierin liegt der Beweis des *Kronecker*schen Satzes für einen Primzahlgrad, und der Beweis ist damit allgemein geführt.

Über eine neue Reduktionsmethode bei hydrodynamischen Problemen.

Von Herrn *Ernst Richard Neumann* in Marburg a. d. L.

Bei der Ermittelung eines wirbelfreien Bewegungszustandes einer Flüssigkeit ist es seit langem üblich, das ganze Problem zurückzuführen auf die Bestimmung einer einzigen Funktion, des Geschwindigkeitspotentials φ: man drückt die in letzter Linie gesuchten Größen, also die Strömungskomponenten, den Druck und die Dichtigkeit im Innern der Flüssigkeit, sämtlich in ein für alle Male feststehender Weise durch die Funktion φ, bzw. ihre Ableitungen aus, so daß also im einzelnen Falle tatsächlich nur noch dieses Geschwindigkeitspotential φ zu bestimmen übrig bleibt, und zwar ergibt sich zu dieser Bestimmung eine Differentialgleichung, welche unter gewissen, das spezielle Problem charakterisierenden Nebenbedingungen zu integrieren ist. — Im Spezialfalle inkompressibler Flüssigkeiten ist bekanntlich diese Differentialgleichung, auf deren Integration also das Problem hinausläuft, die *Laplace*sche Differentialgleichung des Potentials.

Dieser durch seine Einfachheit ausgezeichnete Ansatz, hydrodynamische Probleme durch Einführung des Geschwindigkeitspotentiales zu lösen, enthält aber eben bereits die Beschränkung auf wirbelfreie Bewegungen in sich, er versagt, sowie man von einem mit Wirbeln behafteten Anfangszustande ausgeht. — Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es nun, zu zeigen, daß es eine andere große Klasse von Flüssigkeitsbewegungen gibt, und darunter auch *Wirbelbewegungen,* die einer ganz ähnlichen Behandlung fähig sind, wie sie die wirbelfreien Bewegungen durch Einführung des Geschwindigkeitspotentiales finden. Diese Bewegungen, welchen die nach-

folgende Untersuchung gilt, lassen sich kurz charakterisieren als die *stationären, zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegungen;* freilich müssen wir, um sie unserer Behandlungsweise zugänglich zu machen — falls wir uns nicht von vornherein auf inkompressible Flüssigkeiten beschränken —, noch eine weitere Annahme hinzunehmen, daß nämlich die Bewegung *kräftefrei* vor sich gehen soll. Meine Aufgabe wird nun darin bestehen, zu zeigen, daß wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, die Bewegung also stationär, zweidimensional (und nötigenfalls auch kräftefrei) ist, daß sich dann stets die Strömungskomponenten, der Druck und die Dichtigkeit im Innern der Flüssigkeit, kurz alle uns bei der Bewegung interessierenden Größen, nach bestimmten Regeln durch eine einzige Funktion Φ ausdrücken lassen. Diese will ich als „*Strömungsfunktion*" bezeichnen; sie allein braucht man also bei einem Problem dieser Art noch zu bestimmen, sie spielt demnach jetzt genau dieselbe Rolle wie bei wirbelfreien Bewegungen das Geschwindigkeitspotential, und zu ihrer Bestimmung ergibt sich auch wieder eine Differentialgleichung und eine zugehörige Randbedingung. — Die Differentialgleichung ist von der dritten Ordnung, reduziert sich aber im Spezialfalle *wirbelfreier* Bewegungen von inkompressiblen Flüssigkeiten auf eine Gleichung von der zweiten Ordnung, und zwar gerade wieder auf die *Laplace*sche Gleichung, der auch das (in diesem Falle ja ebenfalls existierende) Geschwindigkeitspotential genügt. Doch sind die Randbedingungen, welche Strömungsfunktion und Geschwindigkeitspotential befriedigen müssen, verschieden; diese beiden Funktionen, mit deren jeder man also wirbelfreie Bewegungszustände darzustellen vermag, werden sonach durchaus nicht identisch. — Auch insofern ist jetzt bei der Strömungsfunktion die Sachlage eine ganz andere, als hier eben die Potentialgleichung nur als Spezialfall einer Gleichung dritter Ordnung auftritt, die auch noch bei Wirbelbewegungen gültig bleibt, während bei solchen ein Geschwindigkeitspotential oder eine direkte Verallgemeinerung desselben überhaupt nicht existiert.

§ 1. *Die Einführung der Strömungsfunktion.*

Wir denken uns ein zylindrisches Gefäß gegeben von ganz beliebigem, aber dauernd unverändertem Querschnitte. Die Richtung der Zylinderachse wählen wir zur z-Richtung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. — In dem Gefäße bewege sich eine Flüssigkeit, und zwar nehmen wir zunächst

an, diese Bewegung sei *stationär*, die Strömungskomponenten u, v, w seien also unabhängig von der Zeit; ferner sei die Bewegung *zweidimensional*, d. h. jedes Flüssigkeitsteilchen bleibe dauernd in demselben Querschnitte des Gefäßes — es sei also überall die z-Komponente der Strömung: $w = 0$ —, und in allen diesen Querschnitten (bei verschiedenem z) herrsche genau der gleiche Bewegungszustand, es seien also auch die Strömungskomponenten u und v unabhängig von z, bloße Funktionen von x und y:

$$u \equiv u(x, y), \qquad v \equiv v(x, y), \qquad w \equiv 0.$$

Endlich nehmen wir noch an, die Flüssigkeit sei dem Einflusse äußerer Kräfte, wie z. B. der Schwere, entzogen, die Bewegung sei also *kräftefrei*.

Bezeichnen wir dann noch den Druck und die Dichtigkeit im Innern der Flüssigkeit mit p bzw. ε, so sind die Größen u, v, w, p und ε durch die folgenden Gleichungen mit einander verknüpft, zunächst durch die *Euler*schen Differentialgleichungen:

$$(1.) \qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

zu welchen noch die Kontinuitätsgleichung hinzutritt:

$$(2.) \qquad \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} = 0$$

und ferner eine von der Natur der betrachteten Flüssigkeit abhängige

(3.) *Beziehungsgleichung zwischen Dichtigkeit* ε *und Druck* p;

denn ich will mich hier der Einfachheit halber auf die Betrachtung solcher Flüssigkeiten beschränken, bei denen die Dichtigkeit allein vom Drucke abhängig ist, obwohl es, wie ich im Schlußparagraphen näher ausführen will, gerade ein wesentlicher Vorzug unserer Methode sein dürfte, daß für ihre Anwendbarkeit diese Voraussetzung nicht wesentlich ist. —

Von diesen im ganzen 5 Gleichungen (1.), (2.), (3.) sagt die eine, nämlich die dritte Gleichung (1.), nur die Tatsache aus, daß auch der Druck p von z unabhängig und demnach eine bloße Funktion von x und y

sein muß, was sich dann vermittelst der Relation (3.) auch auf die Dichtigkeit ε überträgt.*) — Nach Ausschluß dieser letzten Gleichung (1.) bleiben sonach noch 4 Gleichungen, welchen die 4 Funktionen von x und y: u, v, p und ε genügen müssen, und aus diesen Gleichungen und gewissen Nebenbedingungen gilt es auch, diese 4 Funktionen zu bestimmen, wenn es sich um die Ermittelung eines Bewegungszustandes der betrachteten Art handelt.

Um das dadurch gegebene Problem zu vereinfachen, multiplizieren wir nun die ersten *Euler*schen Gleichungen (1.) mit ε und addieren zu ihnen die mit u bzw. v multiplizierte Kontinuitätsgleichung (2.). In dieser Weise erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial(\varepsilon u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon u v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(\varepsilon u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

und hier führen wir noch zur bequemeren Schreibweise die Abkürzungen

$$(4.) \qquad \sqrt{\varepsilon}.u = U \quad \text{und} \quad \sqrt{\varepsilon}.v = V$$

*) Besteht speziell zwischen der Dichtigkeit ε und dem Drucke p Proportionalität (wie bei einem auf konstanter Temperatur gehaltenen Gase), nehmen wir also für (3.) die Relation

$$\varepsilon = c.p$$

an, aber auch nur dann, beeinflussen Kräfte, welche in der Richtung der Zylinderachse (z-Richtung) wirken und ihrer Intensität nach nur von z abhängen, die Bewegung selber nicht im mindesten; es kann dann vielmehr genau derselbe zweidimensionale Bewegungszustand eintreten und als stationärer Zustand fortbestehen wie beim Fehlen aller äußeren Kräfte. Zur Bestimmung der Strömungskomponenten u und v sind bei diesem Zustande also ohne weiteres trotz der von außen wirksamen Kräfte die weiter unten im Texte gegebenen Vorschriften anwendbar, während der Druck und die Dichtigkeit jetzt *noch von z abhängig werden,* indem zu den nach den Vorschriften des Textes als Funktionen von x und y berechneten Größen p und ε noch der Faktor $e^{-c\mathsf{W}}$ hinzutritt, wenn $Z = -\frac{d\mathsf{W}}{dz}$ (wo $\mathsf{W} = \mathsf{W}(z)$) die äußere beschleunigende Kraft bedeutet. — Es folgt dies leicht, wenn wir berücksichtigen, daß jetzt die dritte *Euler*sche Differentialgleichung folgendermaßen lautet:

$$0 = Z - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Der bei weitem wichtigste hierher gehörige Fall ist natürlich der, daß die Flüssigkeit, (Gas) in ein vertikal gestelltes zylindrisches Gefäß eingeschlossen ist und der Wirkung der *Schwere* unterliegt ($\mathsf{W} = g.z$, wenn die z-Richtung vertikal nach oben gerechnet wird).



ein, um dann schreiben zu können:

$$(5.)\qquad \frac{\partial(UV)}{\partial y} = -\frac{\partial(p+U^2)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(UV)}{\partial x} = -\frac{\partial(p+V^2)}{\partial y}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$U\cdot V dx - (p+U^2) dy \text{ ein vollständiges Differential}$$

ist, oder aber, daß es eine Funktion $F_1(x, y)$ gibt von der Art, daß

$$(6^a.)\qquad U\cdot V = \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad\text{und}\quad -(p+U^2) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ist, und ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (5.), daß es eine Funktion $F_2(x, y)$ gibt, vermittelst welcher sich $U\cdot V$ und $-(p+V^2)$ folgendermaßen darstellen lassen:

$$(6^b.)\qquad U\cdot V = \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad\text{und}\quad -(p+V^2) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Eine Vergleichung der beiden ersten Formeln (6^a.) und (6^b.) liefert aber sofort die Beziehungsgleichung

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

zwischen den beiden Funktionen F_1 und F_2, und aus dieser Gleichung folgt durch abermalige Anwendung unserer obigen Schlußweise, daß es eine weitere Funktion von x und y geben muß — ich will sie mit $2\Phi(x, y)$ bezeichnen —, von solcher Beschaffenheit, daß für F_1 und F_2 die Darstellungen gelten:

$$F_1 = \frac{\partial(2\Phi)}{\partial y} \quad\text{und}\quad F_2 = \frac{\partial(2\Phi)}{\partial x}.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (6^a.) und (6^b.) erlaubt dann diese ursprünglich 4 Gleichungen in die folgenden 3 zusammenzuziehen:

$$(7.)\quad U.V = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}, \qquad p+U^2 = -2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad p+V^2 = -2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichungen gestatten nun in einfachster Weise, die 3 Größen U, V und p durch die zweiten Differentialquotienten der Funktion Φ auszudrücken, und zwar ergeben sich folgende Darstellungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varepsilon u^2 \equiv U^2 = +\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}, \\ \varepsilon v^2 \equiv V^2 = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}, \end{cases}$$

$$(9.)\quad p = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}.$$

Dabei ist unter der Quadratwurzel immer ihr positiver Wert zu verstehen, und beim abermaligen Ausziehen der Quadratwurzeln (um nämlich U und V selber aus U^2 und V^2 zu bestimmen) ist wegen des Vorzeichens die erste Formel (7.) zu beachten, nach der $U.V = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}$ sein muß.

Diese 3 Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (3.) liefern nun für alle vier Funktionen u, v, p und ε Darstellungen durch die Differentialquotienten der einen Funktion Φ: den *Druck* p stellt ja direkt die Gleichung (9.) in der gewünschten Weise dar, die *Dichtigkeit* ε aber nahmen wir als bekannte Funktion des Druckes p an [vgl. (3.)], so daß sich auch für sie leicht eine Darstellung durch die zweiten Differentialquotienten von Φ ergibt, und unter Benutzung dieses Resultates gestatten dann die beiden Gleichungen (8.), eine ebensolche Darstellung sofort auch für die *Strömungskomponenten* u und v anzugeben.

Es ist uns somit gelungen, die sämtlichen uns bei dem Bewegungszustande interessierenden Größen durch eine einzige Funktion Φ, *bzw. deren Ableitungen auszudrücken,* ähnlich wie man sie bei wirbelfreien Bewegungen durch die Ableitungen des Geschwindigkeitspotentiales auszudrücken pflegt [vgl. § 5]. — Diese Funktion Φ, welche in unserem Falle an die Stelle des Geschwindigkeitspotentiales tritt, will ich hinfort als „*Strömungsfunktion*" bezeichnen; ist sie gegeben, so ist damit also auch der ganze Strömungszustand bekannt. *Auf die Bestimmung dieser einen Funktion* Φ *haben wir somit das ganze Problem, den Bewegungszustand zu ermitteln, reduziert.*

§ 2. *Die Differentialgleichung der Strömungsfunktion.*

Zur Bestimmung der Strömungsfunktion Φ ergibt sich eine Bedingungsgleichung sofort in der Weise, daß wir in einer der Gleichungen (1.) oder (2.) alle darin auftretenden Größen, also u, v, p und ε in der angegebenen

Weise durch die Funktion Φ und ihre Differentialquotienten ausdrücken, und so die Gleichung in eine Bedingungsgleichung allein für Φ verwandeln. Von welcher der ursprünglichen Gleichungen wir hierbei ausgehen, ist natürlich gleichgültig, wir wählen daher die symmetrische Formel (2.), die Kontinuitätsgleichung, zum Ausgangspunkte, und schreiben sie, da ja

$$\varepsilon . u = \sqrt{\varepsilon} . U \quad \text{und} \quad \varepsilon . v = \sqrt{\varepsilon} . V \qquad \text{[vgl. (4.)]}$$

ist, zunächst folgendermaßen:

$$\frac{\partial (\sqrt{\varepsilon} . U)}{\partial x} + \frac{\partial (\sqrt{\varepsilon} . V)}{\partial y} = 0 .$$

Hieraus folgt dann durch Ausführung der Differentiation nach einer kurzen Rechnung:

$$(10.) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(U \frac{\partial (\log \varepsilon)}{\partial x} + V \frac{\partial (\log \varepsilon)}{\partial y}\right) = 0 .$$

Nun sollte aber ε eine bekannte Funktion von p sein [vgl. (3.)], das gleiche gilt daher auch von $\log \varepsilon$; wir setzen

$$(11.) \qquad \log \varepsilon = L(p) \quad \text{und} \quad \frac{dL}{dp} = L'(p),$$

so daß dies also zwei nur von der Natur der betrachteten Flüssigkeit abhängige, als bekannt anzusehende Funktionen sind. — Durch Einführung derselben erhalten wir dann aus (10.):

$$(12.) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{2} L'(p) \left(U \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0,$$

und hier haben wir jetzt nur noch für U, V und p ihre aus (8.) und (9.) ersichtlichen Ausdrücke einzusetzen, um die gesuchte Bedingungsgleichung für die Strömungsfunktion Φ zu erhalten. — Wir wollen diese Substitutionen nur in den vorkommenden Differentialquotienten wirklich durchführen. Eine leichte Rechnung, die ich in ihren Einzelheiten wohl übergehen darf, lehrt:

$$(13^a.) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{U^2 + V^2} \left\{U \frac{\partial \Delta}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta}{\partial y}\right\}, \quad \text{wo} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

und ferner:

$$(13^b.) \quad U \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{U^2 + V^2} \left\{U^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + 3 U^2 V \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 dy} + 3 U V^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} + V^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}\right\}.$$

Diese Ausdrücke, in (12.) eingesetzt, liefern uns als die gesuchte Bedingung für Φ, die Gleichung

$$(14.)\quad \left\{ U\frac{\partial \Delta}{\partial x} + V\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} - L'(p)\left\{ U^3\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - 3U^2V\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + 3UV^2\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - V^3\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right\} = 0,$$

in welcher U, V und p als Abkürzungen in den aus (8.) und (9.) ersichtlichen Bedeutungen stehen.

Dieser Differentialgleichung dritter Ordnung (14.) *muß also die Strömungsfunktion* Φ *genügen*; aus ihr und einer im nächsten Paragraphen abzuleitenden Randbedingung ist diese Funktion gegebenenfalls zu bestimmen. Ist dies geschehen, so liefern uns die Formeln (8.) und (9.) in Verbindung mit (3.) in der oben näher angegebenen Weise die Strömungskomponenten u und v, den Druck p und die Dichtigkeit ε, kurz den ganzen Strömungszustand der Flüssigkeit.

Spezialisierung. — Wir wollen hier sogleich kurz auf den später noch ausführlicher zu behandelnden Spezialfall einer *inkompressiblen Flüssigkeit* eingehen. In diesem Falle lautet die Kontinuitätsgleichung (d. i. die Inkompressibilitätsbedingung):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{oder was dasselbe:} \quad \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

denn U und V unterscheiden sich von u und v nur durch den jetzt ja als konstant anzusehenden Faktor $\sqrt{\varepsilon}$ (vgl. (4.)). — Die für die Strömungsfunktion Φ sich ergebende Bedingungsgleichung lautet daher nach (13ª.) jetzt kurz:

$$(14'.)\qquad U\frac{\partial \Delta}{\partial x} + V\frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0, \quad \text{wo } \Delta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},$$

wie das auch durch Spezialisierung aus (14.) leicht abzuleiten gewesen wäre, da jetzt wegen $\varepsilon = const.$ auch $\log \varepsilon$, d. i. $L(p) = const.$ und daher $L'(p) = 0$ ist (vgl. (11.)).

Mit Rücksicht auf (4.) können wir nun dieses Resultat (14'.) auch so schreiben:

$$u\frac{\partial \Delta}{\partial x} - v\frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0,$$

und dies ist, da Δ ebenso wie Φ selber allein von den beiden Variablen x und y abhängt, nichts anderes als die Aussage, daß der im Sinne der

Hydrodynamik gebildete „totale“ Differentialquotient der Funktion $\varDelta$ nach der Zeit, oder besser gesagt, der „substantielle“ Differentialquotient von $\varDelta$ (*C. Neumann*) gleich 0 ist:

$$\frac{d\varDelta}{dt}=0,$$

es bleibt somit bei einer inkompressiblen Flüssigkeit der dem einzelnen Flüssigkeitsteilchen anhaftende Wert von $\varDelta\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ *während der ganzen Bewegung ungeändert.* Ist also die Strömungsfunktion Φ bekannt, so stellt die Gleichung

$$\varDelta\Phi=\text{const.}$$

die *Gleichung der Stromlinien,* d. h. der Bahnen der einzelnen Teilchen dar — vorausgesetzt, daß nicht etwa $\varDelta\Phi$ identisch (d. h. im ganzen von Flüssigkeit erfüllten Raume) konstant ist, ein Fall, der weiter unten noch eingehender behandelt werden soll.

§ 3. *Die Randbedingung für die Strömungsfunktion.*

Wir lassen jetzt die Beschränkung auf inkompressible Flüssigkeiten fallen und wenden uns wieder dem zu Anfang behandelten Falle einer beliebigen, im allgemeinen also kompressiblen Flüssigkeit zu. Diese Flüssigkeit sollte eingeschlossen sein in ein Gefäß, dessen Wände dauernd in ihrer Lage festgehalten werden — wie das ja schon bedingt wird durch die Annahme, daß die Bewegung der Flüssigkeit stationär sein soll.

Die Berücksichtigung dieser Tatsache, daß die Wände fest sind, ergibt nun sofort als eine weitere Forderung zur Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung die, daß an der ganzen Begrenzung die Normalkomponente der Bewegung gleich 0 sein muß, d. h. es muß, wenn α und β die Richtungskosinus der in einem Punkte der Begrenzung auf dieser errichteten Normale bedeuten, daselbst

(15.) $$\alpha u+\beta v=0$$

sein. Nun hatten wir aber oben u und v durch die Strömungsfunktion Φ auszudrücken gelernt; es stellt dies also in Wahrheit eine Bedingungsgleichung für die Funktion Φ dar, und diese Bedingungsgleichung wollen

wir nun explizite aufstellen; wir werden sehen, daß sie sich in eine äußerst einfache Form setzen läßt.

Zunächst multiplizieren wir die Gleichung (15.) mit $\sqrt{\varepsilon}$ und schreiben dann mit Rücksicht auf (4.):

$$\alpha U + \beta V = 0,$$

und, um nun hier die Strömungsfunktion Φ bequem einführen zu können, multiplizieren wir noch weiter mit U; dann folgt mit Rücksicht auf die beiden ersten der Gleichungen (7.) und (8.), daß in allen Punkten der Begrenzung

$$\alpha \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2} \right\} + \beta . 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

sein muß, und hieraus ergibt sich, wenn wir die Irrationalität beseitigen, für alle Randpunkte die Bedingungsgleichung

$$\text{(16.)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \left[(\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \alpha . \beta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] = 0.$$

Wollten wir nun hier den ersten Faktor gleich 0 setzen, so würde aus der ersten Gleichung (7.) folgen, daß entweder u oder v gleich 0 sein muß, daß also die Strömung in der Richtung einer der Koordinatenachsen stattfinde. Da nun aber in Wahrheit die Strömung tangential zur Begrenzung verläuft, so kann der erste Faktor in (16.) nur an solchen Stellen verschwinden, wo Tangente oder Normale den Koordinatenachsen parallel sind. An solchen Stellen ist aber von den beiden Richtungskosinussen α und β der Normale ν sicher der eine gleich 0, es liefert uns also auch hier der zweite Faktor in (16.) gleich 0 gesetzt, dasselbe Resultat: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$, so daß wir also berechtigt sind, *überall auf der ganzen Begrenzung* den zweiten (in Klammern gesetzten) Faktor in (16.) gleich 0 anzunehmen, also die Gleichung

$$\text{(17.)} \qquad (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \alpha . \beta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

als die Randbedingung für die Funktion Φ anzusehen.

Diese Gleichung gilt es nun zu interpretieren. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir noch die Tangente in dem betrachteten Punkte der Begrenzung

mit τ, und zwar sei dies noch genauer diejenige Tangentenrichtung, welche zur Normalen ν ebenso liegt, wie die positive y- zur positiven x-Achse, so daß also

$$\cos(\tau, x) = -\cos(\nu, y) \equiv -\beta \quad \text{und} \quad \cos(\tau, y) = \cos(\nu, x) \equiv \alpha$$

ist. Dann können wir die Gleichung (17.) auch in die folgende Form setzen:

$$\left(\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right) \cos(\tau, x) + \left(\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) \cos(\tau, y) = 0$$

und dafür wieder können wir, da ja

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$$

ist, auch schreiben:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right)}{\partial x} \cos(\tau, x) + \frac{\partial\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right)}{\partial y} \cos(\tau, y) = 0,$$

oder endlich

(18.) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu \partial \tau} = 0.$$

Dieser Bedingung muß also die Strömungsfunktion Φ in jedem Punkte der Begrenzung genügen; es muß ihr zweiter Differentialquotient, genommen nach den Richtungen der Normalen und der Tangente, verschwinden. — Handelt es sich sonach um die Bestimmung einer Flüssigkeitsbewegung der betrachteten Art, d. h. eines stationären, zweidimensionalen und kräftefreien Strömungszustandes, so gilt es, die Differentialgleichung dritter Ordnung (14.) unter Berücksichtigung dieser Randbedingung (18.) zu integrieren und so eine Strömungsfunktion Φ zu ermitteln. Ist dies geschehen, so ist damit, wie am Schluß von § 1 näher ausgeführt wurde, ein Strömungszustand vollständig bestimmt.

Bemerkt sei hier noch, daß sowohl die Differentialgleichung (14.), wie auch die Randbedingung (18.) nur *zweite* Differentialquotienten der Strömungsfunktion enthalten, und daß man letzterer somit stets noch *eine willkürliche lineare Funktion von x und y additiv hinzufügen* darf, was augenscheinlich auch auf die Werte (8.) und (9.) von U, V und p und somit überhaupt auf den durch die Strömungsfunktion bestimmten Bewegungszustand ohne Einfluß ist. —

Ferner sei auch noch bemerkt, daß wir nur der Einfachheit halber bisher die Annahme gemacht haben, die Flüssigkeit sei ringsum begrenzt von der festen Wand eines zylindrischen Gefäßes. Wir dürfen ebensogut annehmen, daß gewisse der erzeugenden Geraden des Zylinders Ein- bzw. Ausströmungslinien für die Flüssigkeit sind, oder gar, daß ausgedehntere, spaltförmige (d. h. von zwei solchen Geraden begrenzte) Ein- oder Ausströmungsöffnungen in der Wand des Zylinders vorhanden sind. Dann gilt die obige Randbedingung (18.) natürlich nur für die Punkte, in denen die Flüssigkeit an feste Wände grenzt, während an den Öffnungen noch nähere auf das Zu- bzw. Abströmen der Flüssigkeit bezügliche Festsetzungen notwendig sind, um den Bewegungszustand im Innern des Gefäßes zu einem völlig bestimmten zu machen.

§ 4. *Der Spezialfall einer inkompressiblen Flüssigkeit.*

Wir wollen in diesem und dem folgenden Paragraphen noch den Fall etwas weiter verfolgen, daß die betrachtete Flüssigkeit *inkompressibel* ist. Am Schlusse von § 2 stellten wir bereits fest, daß sich dann die Differentialgleichung, der die Strömungsfunktion genügen muß, erheblich vereinfacht und folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0, \qquad \text{[vgl. (14'.)]}$$

wo $\Delta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ ist und u und v als Abkürzungen in den aus (8.) ersichtlichen Bedeutungen stehen.

Ich will nun zunächst zeigen, daß wir uns in diesem Spezialfalle einer inkompressiblen Flüssigkeit auch von der einen einschränkenden Voraussetzung frei machen können, die wir über die Flüssigkeitsbewegung bisher immer machten, nämlich von der Annahme, daß keine äußeren Kräfte, wie z. B. die Schwere, wirken sollten. Setzen wir nämlich jetzt das Vorhandensein solcher äußeren Kräfte voraus und bezeichnen deren Potential mit $\mathsf{W}(x,y,z)$, so nimmt die erste der *Euler*schen Gleichungen (1.) die folgende Gestalt an:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \mathsf{W}}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Hierfür können wir jetzt, wo ja ε konstant ist, auch schreiben:

$$(1_1'.)\qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial(p+\varepsilon \mathsf{W})}{\partial x},$$

und entsprechend modifizieren sich auch die zweite und dritte der *Euler*schen Gleichungen; es tritt also in den Gleichungen (1.) an die Stelle von p immer nur der Ausdruck $p+\varepsilon.\mathsf{W}$, sonst bleiben alle Schlüsse ungeändert.*) Daher können wir die Resultate der in den ersten Paragraphen entwickelten Theorie, speziell angewandt auf inkompressible Flüssigkeiten, so zusammenfassen:

Es sei eine inkompressible Flüssigkeit (Dichtigkeit ε) in einem zylindrischen Gefäße eingeschlossen und stehe unter dem Einflusse beliebiger äußerer konservativer Kräfte (Potential $\mathsf{W}(x, y, z)$). Sie führe eine stationäre zweidimensionale Bewegung aus, derart, daß jedes Teilchen dauernd in demselben Querschnitte des Gefäßes bleibt und in allen diesen Querschnitten derselbe Bewegungszustand herrscht. Alsdann lassen sich die Strömungskomponenten u und v und der Druck p in folgender Weise durch die Ableitungen einer einzigen Funktion, der Strömungsfunktion $\Phi(x, y)$, ausdrücken:

$$(8.)\quad\begin{cases}\varepsilon u^2=+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2},\\ \varepsilon v^2=-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2},\end{cases}\quad\left(\varepsilon uv=2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right),$$

$$(9'.)\quad p=-\varepsilon\mathsf{W}(x,y,z)-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}.$$

Diese Strömungsfunktion genügt der folgenden Differentialgleichung dritter Ordnung:

---

*) Die dritte der *Euler*schen Gleichungen besagt demnach jetzt nicht mehr, daß p, sondern daß

$$p+\varepsilon.\mathsf{W}(x,y,z)\qquad \textit{von } z \textit{ unabhängig},$$

ist. Setzen wir also W wirklich auch von z abhängig voraus, machen also die Annahme, daß die äußeren beschleunigenden Kräfte auch eine Komponente $\left(-\frac{\partial\mathsf{W}}{\partial z}\right)$ in der z-Richtung, d. h. senkrecht zu den Querschnitten des Gefäßes, besitzen, so wird der Druck p auch von z abhängig, die Druckverteilung wird von Querschnitt zu Querschnitt eine andere werden, was aber an der Tatsache nichts ändert, daß die *Bewegung selber zweidimensional* verläuft, denn *auf die den Bewegungszustand bestimmenden Größen u und v haben die äußeren Kräfte keinerlei Einfluß,* diese bleiben nach wie vor bloße Funktionen von x und y [vgl. weiterhin die Formeln (8.) und (9'.)].

der Differentialgleichung (14′.) genügt, so läßt sich dieses Resultat noch weiter vereinfachen. Indem wir mit u erweitern, folgt

$$\zeta = \frac{u^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} - v\left(-v\frac{\partial \Delta}{\partial y}\right)}{2\varepsilon u(u^2+v^2)} = \frac{1}{2\varepsilon u}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial y},$$

oder auch, was nach (14′.) dasselbe ist:

$$\zeta = -\frac{1}{2\varepsilon v}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial x}.$$

Somit können wir das Resultat folgendermaßen aussprechen:

Die Wirbelkomponente ζ (Komponente der Drehung um die z-Achse) drückt sich bei der oben beschriebenen Bewegung auf die folgenden beiden Arten durch die Strömungsfunktion Φ aus:

$$\zeta = +\frac{1}{2\varepsilon u}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial y} = -\frac{1}{2\varepsilon v}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial x}. \tag{20.}$$ —

Ich möchte diesen Paragraphen nicht beschließen, ohne die entwickelte Theorie noch auf einfache Beispiele anzuwenden. So wollen wir uns denn einmal die Frage vorlegen, ob es stationäre, zweidimensionale Bewegungszustände einer inkompressiblen Flüssigkeit gibt, bei welchen die Strömungsfunktion lediglich vom Abstande r von einem festen Punkte abhängt. — Wir wählen bei Untersuchung dieser Frage naturgemäß diesen Punkt zum Koordinatenanfangspunkte und führen überdies noch Polarkoordinaten r, ϑ ein, indem wir

$$x = r.\cos\vartheta, \qquad y = r.\sin\vartheta$$

setzen. Dann lehrt eine leichte Rechnung, unter der Annahme, daß Φ eine Funktion allein von r ist:

$$(a) \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)$$

und, da sonach Δ seinerseits wieder nur von r abhängt, so folgt weiter:

$$(b) \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial x} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{x}{r} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial y} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{y}{r} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\sin\vartheta,$$

und ferner findet man leicht:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right),$$

und daraus dann weiter:

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\left(\frac{x^2+y^2}{r}\right)^2\cdot\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\right)\right\}^2.$$

Somit hat die in (8.) und (9'.) auftretende Quadratwurzel, da sie immer positiv zu wählen ist, den Wert $\frac{x^2+y^2}{r}\cdot\left|\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\right)\right|$.

Je nachdem nun $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\right)$ positiv oder negativ ist, setzen wir

$$(c)\qquad r\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\right)=\pm 2\,\{M(r)\}^2,$$

so daß also der Wert jener Quadratwurzel gleich $2M^2\,\frac{x^2+y^2}{r^2}=2M^2$ wird. So folgt denn aus (8.), (9'.) und (20.):

$$(d)\quad\begin{cases}\varepsilon u^2=2M^2\left(\pm\frac{x^2-y^2}{r^2}+\frac{x^2+y^2}{r^2}\right), & \\ \varepsilon v^2=2M^2\left(\mp\frac{x^2-y^2}{r^2}+\frac{x^2+y^2}{r^2}\right), & \left(\varepsilon uv=\pm 2M^2\cdot\frac{2xy}{r^2}\right),\\ p=-\varepsilon W(x,y,z)-\frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\mp 2M^2-2M^2, & \zeta=-\frac{1}{2\varepsilon v}\,\frac{d\Delta}{dr}\cos\vartheta.\end{cases}$$

Verfolgen wir nun zunächst den Fall weiter, daß

$$(\text{I.})\qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr}\right)\leq 0$$

ist, also den Fall des **unteren** Vorzeichens in den Formeln (*c*) und (*d*), so ergibt sich:

$$\varepsilon u^2=2M^2\cdot\frac{2y^2}{r^2},\qquad \varepsilon v^2=2M^2\cdot\frac{2x^2}{r^2},\qquad \left(\varepsilon uv=-2M^2\cdot\frac{2xy}{r^2}\right)$$

und daher:

$$(e_1)\quad u=-\frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{y}{r}=-\frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\vartheta,\qquad v=\frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{x}{r}=\frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\vartheta,$$

und aus diesen Formeln ersehen wir zunächst, daß wir es in dem Falle (I.) jedenfalls mit einer rotierenden Bewegung, einer Bewegung in lauter Kreisen um den Anfangspunkt zu tun haben. — Wie sieht nun aber in diesem Falle die Strömungsfunktion Φ aus? — Die Bedingungsgleichung (14.'):

$$u\,\frac{\partial\Delta}{\partial x}+v\,\frac{\partial\Delta}{\partial y}=0$$

ist jetzt, wie ein Blick auf die Formeln (b) und (e_1) lehrt, identisch befriedigt, d. h. *jede beliebige Funktion Φ von r kann also Strömungsfunktion sein, sofern nur* $r \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{dr}\right) = -2\{M(r)\}^2$, *d. h.* $\leqq 0$ *ist (was sich nötigenfalls durch einen Vorzeichenwechsel von Φ erreichen läßt). Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen erfolgt dann in konzentrischen Kreisen um den Anfangspunkt, und zwar besitzen die Teilchen im Abstande r sämtlich die (lineare) Geschwindigkeit*

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{2M(r)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ferner ist die Wirbelkomponente aller dieser Teilchen:

$$\zeta = -\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2M} \cdot \frac{d\Delta}{dr} = -\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}.M(r)} \cdot \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)\right\}$$

[*vgl. die Formeln* (20), (a), (b) *und* (e_1)]. — *Endlich ist die Druckverteilung bestimmt durch die Formel:*

$$p = -\varepsilon.\mathsf{W}(x, y, z) - \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr}.$$

Begrenzt zu denken haben wir uns natürlich die Flüssigkeitsmasse von einem Kreiszylinder oder von zwei konzentrischen solchen Zylindern; die Randbedingung (18.) ist dann, wie man leicht erkennt, von selber erfüllt. — Die Willkürlichkeit der Funktion $\Phi(r)$ steht in bestem Einklang damit, daß die einzelnen konzentrischen Schichten einer so begrenzten inkompressiblen Flüssigkeit sich augenscheinlich mit von einander gänzlich unabhängigen Geschwindigkeiten an einander vorbei bewegen können. —

Wir wollen nun auch noch den zweiten Fall näher ins Auge fassen, daß

$$\text{(II.)} \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right) \geqq 0$$

ist, also in den Formeln (c) und (d) das obere Vorzeichen anzuwenden ist. Dann folgt also nach den letzten Formeln (d):

$$\varepsilon u^2 = 2M^2 \cdot \frac{2x^2}{r^2}, \qquad \varepsilon v^2 = 2M^2 \cdot \frac{2y^2}{r^2}, \qquad \left(\varepsilon uv = +2M^2\frac{2xy}{r^2}\right)$$

und daher weiter:

$$(e_{II}) \qquad u = \frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{x}{r} = \frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\vartheta, \qquad v = \frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{y}{r} = \frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\vartheta$$

und hieraus ersehen wir zunächst, daß in diesem Falle (II.) jedenfalls eine **Radialbewegung** vorliegt, und sodann nimmt die Bedingungsgleichung (14'.) für die Strömungsfunktion mit Rücksicht auf (b) die einfache Form an:

$$\frac{2M}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{d\varDelta}{dr} = 0.$$

Falls also nicht mit M gleichzeitig u und v zu 0 werden sollen [vgl. (e_{II})], also ein Zustand vollständiger Ruhe vorliegen soll, muß

$$(f.) \qquad \frac{d\varDelta}{dr} = 0, \text{ und daher } \varDelta \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = \text{const., z. B.} = 4A$$

sein, woraus sich durch Integration

$$\Phi(r) = A r^2 + B \log r + C = A(x^2 + y^2) + B \log r + C$$

ergibt. Die Konstanten A und C bleiben dem Zusatze von S. 203 zufolge **gänzlich** unbestimmt, B hingegen müssen wir mit Rücksicht auf die Annahme II negativ wählen. Wir setzen $B = -\beta^2$. Dann wird

$$2M^2 = r \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{2\beta^2}{r^2}, \qquad M = \frac{\beta}{r},$$

und wir können daher u, v, p und ζ nach den Formeln (e_{II}) und (d) sofort berechnen. Speziell für ζ ergibt sich ein sehr einfaches Resultat; mit Rücksicht auf (f) folgt nämlich: $\zeta = 0$, sodaß wir das Resultat unserer letzten Überlegungen etwa so aussprechen können: *Die einzige nicht in einer Rotation um den Anfangspunkt bestehende Bewegung, bei welcher eine nur vom Radiusvektor r abhängige Strömungsfunktion existiert, besteht bei einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer wirbelfreien Radialströmung (übrigens der einzigen solchen). Die Strömungsfunktion hat dann die folgende Form:*

$$\Phi(r) = \beta^2 \cdot \log \frac{1}{r} + (Ar^2 + C),$$

wo β, A und C willkürliche Konstanten bedeuten, und die Geschwindigkeit aller Flüssigkeitsteilchen im Abstande r vom Anfangspunkte ist:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\beta}{r},$$

und über die Druckverteilung gibt die folgende Formel Aufschluß:

$$p = -\varepsilon \cdot \mathsf{W}(x, y, z) - \frac{2\beta^2}{r^2} - 4A.$$

Dabei bedeutet $\mathsf{W}(x, y, z)$ das Potential der äußeren Kräfte.

§ 5. *Weitere Spezialisierung durch Beschränkung auf wirbelfreie Zustände. Strömungsfunktion und Geschwindigkeitspotential.*

Wir wollen jetzt noch untersuchen, wie sich bei Einführung der Strömungsfunktion speziell die Behandlung *wirbelfreier* Bewegungen gestaltet. Bei ihnen ist überall die Wirbelkomponente $\zeta = 0$ und aus der doppelten Darstellung (20.) für ζ folgt daher gleichzeitig

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varDelta}{\partial y} = 0, \quad \text{und daher:} \quad \varDelta \Phi = \text{const.}$$

Im Falle einer wirbelfreien Bewegung muß demnach die Bedingungsgleichung (14'.) *für die Strömungsfunktion*

$$u \frac{\partial \varDelta}{\partial x} + v \frac{\partial \varDelta}{\partial y} = 0$$

in der Weise befriedigt sein, daß

$$\varDelta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \text{const.} \tag{21.}$$

ist, es genügt in diesem Spezialfalle also Φ einer *Differentialgleichung von nur der zweiten Ordnung,* und überdies ersehen wir aus diesem Resultate, daß gerade diese wirbelfreien Bewegungen den Ausnahmefall darstellen, von dem am Schlusse von § 2 die Rede war, sodaß wir unser dortiges Resultat jetzt präziser so formulieren können: *Bei allen Wirbelbewegungen inkompressibler Flüssigkeiten sind, wenn die Strömungsfunktion Φ bekannt ist, die Stromlinien dargestellt durch die Gleichung $\varDelta \Phi = \text{const.}$**)

Doch kehren wir zurück zu den wirbelfreien Bewegungen. Da wir dem „Zusatz" von S. 203 zufolge zur Strömungsfunktion Φ stets ein beliebiges Glied von der Form $c(x^2 + y^2)$ hinzufügen und daher $\varDelta \Phi$ um eine ganz beliebige Konstante ($2c$) vermehren können, so bedeutet es augenscheinlich keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den nach (21.)

---

*) Nach den Formeln (8.) und (9'.) ist

$$-\varDelta \Phi = p + \varepsilon W + \frac{\varepsilon}{2}(u^2 + v^2).$$

und daß dieser Ausdruck bei wirbelfreien Bewegungen *in der ganzen Flüssigkeit,* bei Wirbelbewegungen aber *auf der Bahn jedes einzelnen Flüssigkeitsteilchens* einen konstanten Wert hat — stationäre Strömung vorausgesetzt —, ist seit langem bekannt. Vgl. z. B. *Lamb,* Hydrodynamics (3. Aufl., Cambridge 1906) Art. 21 pag. 18—19.

konstanten Wert von $\Delta\Phi$ speziell gleich 0 annehmen; demgemäß können wir auch sagen: *Bei wirbelfreien Bewegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit genügt die Strömungsfunktion Φ überall im Innern der Flüssigkeit der Laplaceschen Differentialgleichung:*

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{d. i.} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

und überdies in allen Randpunkten der Bedingung (18.):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\,\partial\tau} = 0. \qquad \left(\begin{array}{l}\nu = \text{Richtung der Normale} \\ \tau = \text{Richtung der Tangente im Querschnitt}\end{array}\right)$$

Um einen solchen Strömungszustand zu ermitteln, brauchen wir also hiernach nur die Differentialgleichung

$$(22.) \qquad \Delta\Phi = 0 \text{ unter dieser Randbedingung } \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\,\partial\tau} = 0$$

zu integrieren. Ist das geschehen, so erhalten wir die Strömungskomponenten u und v aus den Gleichungen (8.):

$$(22'.) \quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon u^2 = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}, \\ \varepsilon v^2 = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2}, \end{array}\right. \quad \left(\varepsilon uv = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right),$$

die sich augenscheinlich jetzt (wegen $\Delta\Phi = 0$) noch vereinfachen ließen.

Andererseits können wir uns aber zur Ermittelung eines wirbelfreien Bewegungszustandes auch des Geschwindigkeitspotentiales φ bedienen. Alsdann lautet die entsprechende Regel folgendermaßen: Man bestimme die Funktion $\varphi(x, y)$, indem man die Differentialgleichung

$$(23.) \qquad \Delta\varphi = 0 \text{ unter der Randbedingung } \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$$

integriert (letzteres weil nämlich die begrenzenden Wände fest sind). Alsdann erhält man für die Strömungskomponenten die Darstellungen:

$$(23'.) \qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Die wirbelfreien Bewegungszustände kann man also nach Belieben durch Angabe der Strömungsfunktion Φ, oder auch des Geschwindigkeitspotentials φ bestimmen, und diese beiden Funktionen befriedigen dieselbe

Differentialgleichung, doch durch die Randbedingungen, denen sie genügen, unterscheiden sie sich von einander. — Von den beiden Darstellungsweisen (22'.) und (23'.) für den Bewegungszustand ist ja unstreitig die mit Hilfe des Geschwindigkeitspotentiales φ die einfachere, doch hat die andere vermittelst der Strömungsfunktion Φ das vor ihr voraus, daß sie eben *unverändert* auch bei Wirbelbewegungen gilt — nur daß dann die Strömungsfunktion nicht mehr der *Laplace*schen Gleichung genügt, während von einem Geschwindigkeitspotential dann überhaupt nicht mehr die Rede sein kann.

Bei wirbelfreien Bewegungen nun, wo also Strömungsfunktion und Geschwindigkeitspotential gleichzeitig existieren, liegt es nahe, nach dem Zusammenhange zwischen diesen beiden die Bewegung vollständig beschreibenden Funktionen zu fragen. Dazu bemerken wir zunächst folgendes: Beide Funktionen genügen in diesem Falle der *Laplace*schen Differentialgleichung, jede für sich kann man daher ansehen als den reellen Teil einer Funktion der komplexen Variablen $z=x+iy$, man kann zu $\Phi(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ in bekannter Weise die imaginären Bestandteile $\Psi(x,y)$ bzw. $\psi(x,y)$ hinzubestimmen, derart, daß

$$(24.)\quad \Phi(x,y)+i\Psi(x,y)=\Omega(z) \quad \text{und} \quad \varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\omega(z)$$

ist, und dann empfiehlt es sich, anstatt nach der Beziehung zwischen den reellen Funktionen Φ und φ nach der zwischen den komplexen Funktionen Ω und ω zu fragen. — Zu ihr gelangen wir, wenn wir die beiden Größen $\varepsilon(u^2-v^2)$ und εuv in doppelter Weise, nämlich einmal durch die Ableitungen von Φ, das andere Mal durch die von φ ausdrücken. So erhalten wir zunächst die folgenden Beziehungsgleichungen:

$$2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right], \qquad 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Berücksichtigen wir nun noch die Differentialgleichung $\Delta\Phi=0$ und die bekannten *Cauchy-Riemann*schen Differentialbeziehungen zwischen reellem und imaginärem Bestandteile einer Funktion komplexen Argumentes, so können wir hierfür auch schreiben:

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right], \qquad -2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

und die zweite dieser Gleichungen mit $-2i$ multipliziert und zur ersten hinzu-

gefügt, liefert uns:

$$4\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)=\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \qquad \text{oder:} \qquad 4\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2.$$

Da es aber bei Funktionen komplexer Variablen auf die Differentiationsrichtung nicht ankommt, können wir hierfür auch allgemeiner schreiben:

$$(25.) \qquad 4\frac{d^2\Omega}{dz^2}=\varepsilon\cdot\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2$$

und dieses Resultat in Worten dann so formulieren: *Es seien $\Phi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ Strömungsfunktion und Geschwindigkeitspotential, wie sie ein und demselben wirbelfreien Bewegungszustande einer inkompressiblen Flüssigkeit entsprechen, und es seien $\Omega(z)$ und $\omega(z)$ diejenigen Funktionen der komplexen Variablen $z=x+iy$, deren reelle Bestandteile $\Phi(x, y)$ bzw. $\varphi(x, y)$ sind. Alsdann besteht zwischen Ω und ω die Beziehung* (25.).

Wir wollen dieses Resultat auf einen speziellen Fall anwenden und dazu benutzen, in ihm die Strömungsfunktion zu bestimmen: Wir denken uns zwei elliptische Zylinder gegeben, welche über konfokalen Ellipsen (Fokalabstand $2k$) stehen. Zwischen beiden Zylindern bewege sich wirbelfrei eine inkompressible Flüssigkeit. Das Geschwindigkeitspotential φ dieser Bewegung ist alsdann der reelle Bestandteil der Funktion $A.\arccos\frac{z}{k}$, wo A eine willkürliche reelle Konstante bedeutet; somit ist jetzt

$$\omega(z)\equiv\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=A.\arccos\frac{z}{k},$$

denn, wie man sich leicht überzeugt, gehören jene beiden Zylinderflächen dem Flächensystem $\psi(x, y)=\text{const.}$ an, es ist also auf ihnen die tangentiale Ableitung von ψ und daher auch die normale Ableitung von φ gleich 0 und durch diese Eigenschaft ist das Geschwindigkeitspotential ja charakterisiert [vgl. (23.)]. — Welches ist nun bei der hier betrachteten Bewegung die Strömungsfunktion Φ? Zur Bestimmung der zugehörigen Funktion $\Omega(z)$ [vgl. (24.)] ergibt sich nach (25.) die Differentialgleichung:

$$4\frac{d^2\Omega}{dz^2}=\varepsilon.A^2\frac{1}{k^2-z^2},$$

und diese liefert integriert:

$$\Omega(z)=\frac{\varepsilon A^2}{8k}\{(k+z)\log(k+z)+(k-z)\log(k-z)\}.$$

Es ist somit die Strömungsfunktion $\Phi(x, y)$ *der wirbelfreien Bewegung zwischen jenen beiden elliptischen Zylindern der reelle Teil dieser Funktion* $\Omega(z)$. —

Entkleiden wir diese letzten, hier auch noch an einem Beispiele erläuterten Resultate jedes physikalischen Beiwerks, so können wir sagen: In diesem Verfahren die Strömungsfunktion einer wirbelfreien Bewegung aus dem Geschwindigkeitspotentiale herzuleiten, haben wir ein Mittel gefunden, ganz allgemein *die Lösung unserer neuen Randwertaufgabe* (22.): *für ein gegebenes Gebiet die Differentialgleichung*

$$\Delta\Phi = 0 \text{ unter der Randbedingung } \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\,\partial\tau} = 0 \text{ zu integrieren}$$

zurückzuführen auf die Lösung der Aufgabe (23.): *für dasselbe Gebiet die Gleichung*

$$\Delta\varphi = 0 \text{ unter der Randbedingung } \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ zu integrieren.}$$

Letzteres Problem stellt bekanntlich nur einen Spezialfall der sogenannten zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie dar. — Beide Probleme haben augenscheinlich nur Sinn für mehrfach zusammenhängende Gebiete, weil ihre einzige Lösung sonst eine Konstante (bzw. eine lineare Funktion) ist.

Einer Besonderheit der Strömungsfunktion bei wirbelfreien Bewegungen sei hier noch Erwähnung getan: Diese besteht darin, daß, wenn $\Phi(x, y)$ eine solche Strömungsfunktion ist, es $-\Phi(x, y)$ ebenfalls ist, denn genügt $+\Phi$ der Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$, so tut es die Funktion $-\Phi$ auch noch. Das war, wie das Beispiel am Schluß des vorigen Paragraphen lehrte, bei Wirbelbewegungen durchaus nicht der Fall, wo an die Stelle von $\Delta\Phi = 0$ die Differentialgleichung dritter Ordnung $u\frac{\partial\Delta}{\partial x} + v\frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0$ trat: dort konnten wir wegen der in u und v enthaltenen stets positiv zu bestimmenden Quadratwurzel [vgl. (22'.)] nicht ohne weiteres Φ mit $-\Phi$ vertauschen, und darum mußte in jenem Beispiele, wenn Φ eine im übrigen auch ganz beliebige Funktion von r bedeutete, doch das Vorzeichen ganz speziell gewählt werden, wenn wir sie als Strömungsfunktion ansehen wollten — nur in dem Spezialfalle einer wirbelfreien Bewegung durften wir auch das entgegengesetzte Vorzeichen benutzen — in bestem Einklang mit unserer obigen Behauptung.

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Beziehung allgemein die beiden durch die Strömungsfunktionen $\Phi_0 = +\Phi(x, y)$ und $\Phi_1 = -\Phi(x, y)$

bestimmten wirbelfreien Strömungen zu einander stehen. Wir führen zu diesem Zwecke die Winkel λ_0 und λ_1 ein, welche die Stromlinien in dem einen und dem anderen Falle im Punkte xy mit der x-Richtung einschließen; dann gelten zunächst die Formeln

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{v_0}{u_0} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{v_1}{u_1}.$$

Bei einem Vorzeichenwechsel der Strömungsfunktion vertauschen sich nun den Formeln (22'.) zufolge die Quadrate u^2 und v^2 der Strömungskomponenten, so daß also $u_1^2 = v_0^2$ und $v_1^2 = u_0^2$ ist, und bezüglich des Vorzeichens folgt aus der Formel $\varepsilon u v = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, daß mit Φ gleichzeitig eine der Größen u und v das Vorzeichen ändert, so daß sich das Resultat ergibt

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = -\frac{u_0}{v_0} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda_0},$$

d. h. *die beiden Strömungen stehen senkrecht auf einander.* Ein bloßer Vorzeichenwechsel der Strömungsfunktion Φ verändert also den Strömungszustand in derselben Weise, wie es bei der Darstellung vermittelst des Geschwindigkeitspotentiales φ der Übergang zu dem konjugierten Potentiale ψ tut — ein Übergang, der doch immerhin die Ausführung einer Quadratur erfordert. —

Diese letzte Überlegung legt die Frage nahe, wie sich der Strömungszustand ändert, wenn wir die Strömungsfunktion $\Phi(x, y)$ durch das konjugierte Potential $\Psi(x, y)$ ersetzen [vgl. (24.)]. Ich behaupte: *man erhält dann eine Strömung, die zur ersteren unter einem Winkel von 45° geneigt ist.* — Mit Bezug auf die ursprüngliche Strömung (Strömungsfunktion $\Phi_0 = \Phi(x, y)$) folgt:

$$\operatorname{tg} 2\lambda_0 = \frac{2\frac{v_0}{u_0}}{1 - \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^2} = \frac{2\varepsilon u_0 v_0}{\varepsilon(u_0^2 - v_0^2)} = \frac{4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}{2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)} = \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}},$$

und bei der Strömung mit der konjugierten Strömungsfunktion $\Phi_2 = \Psi(x, y)$ entsprechend:

$$\operatorname{tg} 2\lambda_2 = \frac{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}},$$

oder mit Rücksicht auf die *Cauchy-Riemann*schen Differentialbeziehungen zwischen Ψ und Φ:

$$\operatorname{tg} 2\lambda_2 = \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}}{-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}}, \qquad \text{d. i. } \operatorname{tg} 2\lambda_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\lambda_0} = \operatorname{tg}\left(2\lambda_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

also folgt tatsächlich: $2\lambda_2 = 2\lambda_0 + \frac{\pi}{2}$ oder $\lambda_2 - \lambda_0 = \frac{\pi}{4}$, d. h. beide Strömungen bilden mit einander einen Winkel von 45°. *Q. e. d.*

§ 6. *Schlußbemerkungen.*

Der im obigen ausführlicher behandelte Ansatz, hydrodynamische Probleme durch Einführung der Strömungsfunktion auf die Ermittelung dieser einen Funktion zurückzuführen, bedarf zu seiner Anwendbarkeit gewisser einschränkender Voraussetzungen, eben daß die Bewegung stationär und zweidimensional und, wenn die Flüssigkeit nicht inkompressibel ist, auch noch kräftefrei sein soll. Diese Voraussetzungen weisen dieser Behandlungsweise von Flüssigkeitsbewegungen einen immerhin nur beschränkten Anwendungsbereich zu. Andererseits mag aber an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, daß man eine Reihe von Voraussetzungen jetzt fallen lassen kann, die man sonst in der Regel macht, und wie sie z. B. auch notwendig sind, um ein Geschwindigkeitspotential einführen zu können. Da ist zunächst die Beschränkung auf wirbelfreie Bewegungen zu nennen, von der oben bereits mehrfach die Rede war, aber weiter bedarf es über die Natur der betrachteten Flüssigkeit, um den Ansatz mit dem Geschwindigkeitspotential machen zu können, noch der Annahme, daß die Dichtigkeit lediglich vom Drucke abhängt, während der Ansatz mit der Strömungsfunktion von einer solchen (der Einfachheit halber auch oben gemachten) Voraussetzung in Wahrheit unabhängig ist, vielmehr auch noch gilt, wenn wir die Dichtigkeit der Flüssigkeit noch von anderen Faktoren wie z. B. der Temperatur abhängig annehmen. So bietet dieser Ansatz denn einen Weg, Strömungszustände (etwa von Gasen) auch bei Berücksichtigung der *Wärmeleitung* zu behandeln,*) worüber sich in der Literatur

*) Eine kurze Mitteilung über diesen Gegenstand habe ich veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg 1906. Vgl. auch die Marburger Inaugural-Dissertation von E. Oettinger: Über stationäre Gasbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Wärmeleitung (1907).

abgesehen von der Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichungen, bisher nur wenig Angaben finden, trotz der großen Bedeutung für viele physikalische und auch technische Fragen. Auch bei Berücksichtigung der *Reibung* läßt sich der Ansatz mit der Strömungsfunktion mit nur unbedeutenden Änderungen durchführen; er bleibt sonach in einer Reihe von Fällen anwendbar, in denen die Unterscheidung zwischen Wirbelbewegungen und wirbelfreien Bewegungen ganz hinfällig wird, weil bei ihnen der Satz von der Erhaltung der wirbelfreien Bewegung nicht mehr gilt, und bei welchen schon aus diesem Grunde von der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials keine Rede sein kann.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß einer ganz analogen Behandlung, wie wir sie oben für die zweidimensionalen stationären Bewegungen angegeben haben, auch die *eindimensionalen nichtstationären Bewegungen* fähig sind, bei denen also an die Stelle der beiden Raumkoordinaten (x und y) als unabhängige Veränderliche eine Raumkoordinate und die Zeit treten.

Congruences de triangles, cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices.

Par M. *M. Stuyvaert* à Gand.

En 1902, dans un volume intitulé *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre* (Gand, Hoste et Paris, Gauthier-Villars. — Chapitre III), nous avons étudié une *congruence ou gerbe G* de cubiques gauches ayant en commun trois bisécantes et deux points. Cette *gerbe G* a pour cas limites, la *gerbe de Reye* formée des cubiques gauches par cinq points et la *gerbe de Sturm* formée des cubiques gauches ayant le même tétraèdre d'osculation. Notre ouvrage n'est pas arrivé en ordre utile pour être cité dans l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*: on y trouvera la bibliographie des systèmes de cubiques gauches.

Vers la même époque, M. *Veneroni* (*Rend. circ. mat. Palermo*, 1902; *Rend. R. Ist. Lomb.* 1904) a examiné les congruences de courbes gauches d'ordre m et de genre n; il a considéré celles de ces congruences qui sont d'ordre p et de classe q, en entendant par là que p courbes passent par un point arbitraire de l'espace et que q d'entre elles ont pour bisécante une droite donnée; il a ensuite attribué à p et q les valeurs les plus simples et appliqué ses résultats aux cubiques.

En novembre 1905 nous avons, dans une note insérée dans les *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, esquissé une méthode donnant la classification et la représentation analytique des congruences linéaires de cubiques gauches. Cette méthode s'applique à des variétés plus élevées; nous l'exposons ici *in extenso*.

Chacun des types de congruences dont nous donnons les équations peut être étudié en détail en suivant la marche que nous avons indiquée

On peut prouver que, pour des valeurs suffisantes des quantités p_i et q_k, le nombre des points annulant la matrice $\|a_{ik}\|$ est toujours supérieur au nombre de conditions définissant ∞^r courbes C; mais ce résultat n'est pas indispensable pour ce qui suit.

§ 2. *Évanouissement identique d'une matrice.*

Nous aurons à rechercher quand une matrice à deux lignes et trois colonnes de formes à une série de variables $x_1, x_2, \dots x_d$ s'annule pour toutes les valeurs des variables. Désignons chaque élément par son degré,

$$\left\| \begin{matrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{matrix} \right\|,$$

supposons les nombres m, m', m'' supérieurs à n, n', n'' et tels que tout déterminant extrait de la matrice soit une forme homogène en $x_1, x_2, \dots x_d$.

Si n et n' ont un facteur commun d'ordre k, posons symboliquement

$$n \equiv k(n-k), \qquad n' \equiv k(n'-k);$$

le déterminant

$$mn' - m'n \equiv k[m(n'-k) - m'(n-k)]$$

doit s'annuler pour toutes les valeurs des variables. Or les ∞^{d-2} systèmes de valeurs qui annulent $n'-k$, sauf ceux, en nombre ∞^{d-3}, qui annulent aussi $n-k$, doivent annuler m'; donc $n'-k$ est un facteur de m' et l'on a symboliquement

$$m' \equiv (n'-k)\alpha, \qquad m \equiv (n-k)\alpha.$$

Si alors h est le plus grand commun diviseur de k et n'', posons

$$k \equiv h(k-h), \qquad n'' = h(n''-h),$$

d'où

$$n \equiv h(k-h)(n-k) \equiv h(n-h), \qquad n' \equiv h(k-h)(n'-k) \equiv h(n'-h);$$

le déterminant $mn'' - m''n$ devient

$$(n-k)\alpha h(n''-h) - m''h(k-h)(n-k) \equiv 0;$$

donc, comme $k-h$ et $n''-h$ n'ont que ∞^{d-3} systèmes de valeurs communes,

$$m'' \equiv \beta(n''-h), \qquad \alpha \equiv \beta(k-h),$$

d'où

$$m' \equiv \beta(n'-h), \qquad m \equiv \beta(n-h).$$

Ainsi, *dans une matrice identiquement nulle à deux lignes et trois colonnes, si les éléments d'une ligne ont un facteur commun h, les éléments de l'autre ont un facteur commun β et, après suppression de ces facteurs, les éléments d'une ligne sont identiques aux éléments correspondants de l'autre.*

La matrice est encore identiquement nulle quand les éléments d'une ligne ou ceux de deux colonnes sont identiquement nuls ou quand les éléments d'une colonne sont nuls et que, dans le déterminant restant il y a un facteur commun à chaque ligne et à chaque colonne. Ce sont là des cas particuliers pouvant se ramener à l'énoncé général par le principe de l'addition des lignes ou colonnes, pourvu qu'il n'y ait qu'une série de variables. S'il y a plus d'une série de variables ces cas particuliers devront être examinés à part.

§ 3. *Congruences linéaires de variétés algébriques.*

Soit une matrice, à l lignes et $l+1$ colonnes, de formes de degré quelconque en $x_1, x_2, \dots x_d$, les coefficients de ces formes étant, à leur tour, fonctions de trois paramètres homogènes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Les degrés des éléments en x et en α sont tels que tout déterminant extrait de la matrice est une forme homogène en x et en α.

Pour chaque système de valeurs de α_1, α_2, α_3, la matrice égalée à zéro représente, en $x_1, x_2, \dots x_d$, une variété algébrique à $d-3$ dimensions dans l'espace à $d-1$ dimensions (une courbe gauche pour $d=4$, un groupe de points d'un plan pour $d=3$). Quand les paramètres α varient on a une congruence de ∞^2 variétés. Si l'on donne au contraire un point x, donc un système de valeurs de $x_1, x_2, \dots x_d$, la matrice s'annule pour un nombre fini μ de valeurs des paramètres α, en d'autres termes pour μ points α, car on peut regarder α_1, α_2, α_3 comme les coordonnées d'un point α dans un plan. La congruence considérée est alors, en général, d'ordre μ, c'est-à-dire que tout point x appartient à μ variétés de la congruence.

Si, parmi les μ points α répondant à un point quelconque x, il y en a s fixes pour tous les points x, et $\mu-s$ variables avec x, la congruence s'abaisse à l'ordre $\mu-s$ et réciproquement.

La congruence est *linéaire* quand, des μ points α, $\mu-1$ sont fixes, quel que soit x.

Ces points fixes peuvent coïncider entre eux, tous ou en partie. En faisant précéder la matrice d'une ligne de formes indépendantes des x et de degré le moins élevé possible en α, on obtient, comme au § 1, des *courbes* C en α; si un point fixe α est j^{uple} sur chacune de ces courbes, il compte pour j^2 points fixes α.

Ces développements rappellent la théorie des *transformations Cremona.* Mais jusqu'ici rien ne vient limiter, dans un sens ou dans l'autre, le nombre de ces points fixes α. La seule chose à faire est donc de donner, au nombre de lignes de la matrice et aux degrés des éléments, les valeurs les plus simples et d'examiner ces cas un à un.

§ 4. *Paramètres intervenant au degré 1 ou 0.*

La matrice est encore à l lignes et $l+1$ colonnes de formes a_{ik} de degré r_i+s_k en $x_1, x_2, \ldots x_d$.

Lorsque les paramètres α ne figurent que dans une colonne, en faisant abstraction de cette colonne, on a un déterminant qui s'annule pour une hypersurface contenant toutes les ∞^2 variétés de la congruence; par un point arbitraire hors de cette hypersurface, il ne passe aucune variété; on peut dire que la congruence est d'ordre zéro.

Lorsque les paramètres α figurent, au premier degré, dans un ligne ou dans deux colonnes seulement, la matrice, pour chaque point x, représente un seul point α; il n'est pas question de points fixes α et les systèmes de *courbes* C sont des faisceaux de droites sans point fixes commun. La congruence, dans ce cas, est toujours linéaire. Si l'on ne considère que deux lignes et trois colonnes de formes linéaires en x, on a les deux types suivants:

$$\text{(I)} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x+\alpha_2 b_x+\alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x+\alpha_2 b'_x+\alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x+\alpha_2 b''_x+\alpha_3 c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x+\alpha_2 b_x+\alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x+\alpha_2 b'_x+\alpha_3 c'_x & a''_x \\ \alpha_1 d_x+\alpha_2 f_x+\alpha_3 g_x & \alpha_1 d'_x+\alpha_2 f'_x+\alpha_3 g'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

S'il y a quatre variables homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, ces formules représentent deux congruences linéaires de cubiques gauches.

§ 5. *Paramètres linéaires dans tous les éléments.*

Bornons-nous à la matrice à deux lignes et trois colonnes de formes d'ordre quelconque en $x_1, x_2, \dots x_d$ et linéaires en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} \Sigma \alpha_i a_{1i} & \Sigma \alpha_i b_{1i} & \Sigma \alpha_i c_{1i} \\ \Sigma \alpha_i a_{2i} & \Sigma \alpha_i b_{2i} & \Sigma \alpha_i c_{2i} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les *courbes C* en α s'obtiennent en faisant précéder M d'une ligne de constantes et forment un réseau de coniques. Des trois points α répondant à un point x, deux doivent être fixes et, évidemment, simples sur les courbes C.

Supposons d'abord ces deux points fixes α distincts, et plaçons-les aux sommets $\alpha_1 \alpha_2$ et $\alpha_1 \alpha_3$ du triangle de référence des α. Pour tout point x, la matrice M s'annule quand on y fait $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; et inversement, si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on a

$$N_3 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} \end{matrix} \right\| \equiv 0,$$

quel que soit le point x. L'autre point fixe $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ donne de même

$$N_2 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{matrix} \right\| \equiv 0.$$

Nous avons vu (§ 2) comment des matrices pareilles peuvent être identiquement nulles: les éléments d'une ligne doivent avoir un facteur commun dont le degré en x peut aller depuis zéro jusqu'au degré, le moins élevé en x, des éléments de M; les éléments de l'autre ligne ont aussi un facteur commun dont l'ordre se déduit du précédent; et les facteurs restants sont identiques par colonnes, à une même constante près. Les cas où les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont identiquement nuls ne doivent pas être considérés à part, parce que les éléments de N_2 ou N_3 sont, dans la matrice M, les coefficients des mêmes paramètres α_2 ou α_3 et qu'on peut donc, par addition de colonnes ou de lignes de M, ramener les cas d'éléments identiquement nuls dans une ligne ou colonne de N_2 (ou N_3) aux cas d'éléments identiques dans deux lignes ou colonnes.

Tous les cas où N_3 s'annule identiquement étant combinés, de toutes les manières possibles, avec les hypothèses analogues relatives à N_2, on obtient toutes les congruences linéaires des variétés considérées, en tant que

les paramètres α sont linéaires partout et que les deux points fixes α sont distincts.

Supposons ensuite que les courbes C aient deux points communs infiniment voisins, c'est-à-dire aient par exemple au point $\alpha_1\,\alpha_2$ la même tangente $\alpha_1 = 0$: les termes en α_3^2 et en $\alpha_2\,\alpha_3$ doivent manquer dans leurs équations et l'on a d'abord

$$N_3 \equiv \begin{Vmatrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} \end{Vmatrix} = 0,$$

et ensuite

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} a_{12}\,b_{23} + a_{13}\,b_{22} - a_{22}\,b_{13} - a_{23}\,b_{12} \equiv 0, \\ a_{12}\,c_{23} + a_{13}\,c_{22} - a_{22}\,c_{13} - a_{23}\,c_{12} \equiv 0, \\ b_{12}\,c_{23} + b_{13}\,c_{22} - b_{22}\,c_{13} - b_{23}\,c_{12} \equiv 0. \end{cases}$$

Les diverses hypothèses qui annulent N_3 étant portées dans les identités (P), on analyse facilement tous les cas possibles pour que ces dernières soient satisfaites. Même pour des degrés relativement petits des formes en $x_1, x_2, \ldots x_d$, le nombre des combinaisons possibles est considérable.

Circonscrivons le problème en supposant que les formes a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, soient toutes linéaires en $x_1, x_2, \ldots x_d$. Les résultats que nous obtiendrons nous fourniront, pour $d=4$ des congruences linéaires de cubiques gauches, pour $d=3$ des congruences linéaires de triangles dans un plan.

Dans ce champ plus restreint, pour que N_3 s'évanouisse identiquement, il faut: ou bien que les éléments d'une ligne de N_3 soient identiques à des constantes près; alors il en est de même dans l'autre ligne et l'on peut, par soustraction, faire disparaître α_3 de deux colonnes de M: ou bien les éléments d'une ligne sont identiques, à une même constante près, aux éléments correspondants de l'autre ligne et, par soustraction, on fait disparaître α_3 d'une ligne de M. En supposant les deux points fixes α distincts, on combine ces hypothèses avec celles qui amènent l'évanouissement de N_2 et l'on a les cas suivants.

1° Le paramètre α_2 manque dans une ligne de M et α_3 dans l'autre, ce qui fournit le type que voici:

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1\,a_x + \alpha_2\,b_x & \alpha_1\,a'_x + \alpha_2\,b'_x & \alpha_1\,a''_x + \alpha_2\,b''_x \\ \alpha_1\,d_x + \alpha_3\,g_x & \alpha_1\,d_x + \alpha_3\,g'_x & \alpha_1\,d''_x + \alpha_3\,g''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

Si la soustraction qui fait disparaître α_2 de la seconde ligne, en faisait disparaître en même temps α_3, on se trouverait dans le cas du type (I) signalé au paragraphe précédent.

2⁰ Les paramètres α_2 et α_3 manquent chacun dans deux colonnes, mais non tous deux dans les mêmes colonnes; c'est un cas particulier du type (II) du paragraphe précédent. Si α_2 et α_3 étaient absents des deux mêmes colonnes, on aurait une congruence d'ordre zéro signalée plus haut.

3⁰ Un paramètre manque dans une ligne et un autre dans deux colonnes; voici alors le type que l'on obtient

$$\text{(IV)}\left\|\begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix}\right\| = 0.$$

Dans le cas des points fixes α coïncidents, on a encore $N_3 \equiv 0$ et l'on peut faire disparaître α_3 d'une ligne ou de deux colonnes.

1⁰ Supposons la première de ces opérations possible et effectuée, donc

$$a_{23} \equiv b_{23} \equiv c_{23} \equiv 0;$$

les identités (P) deviennent

$$P_1 \equiv \left\|\begin{matrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{matrix}\right\| \equiv 0.$$

Si les éléments de chaque ligne de P_1 sont identiques, à des constantes près, on peut, par soustraction de colonnes, ramener au type suivant, assez analogue, comme forme, au type (IV):

$$\text{(V)}\left\|\begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix}\right\| = 0.$$

Si les éléments de chaque colonne de P_1 sont identiques, à une constante près, on obtient le symbole que voici

$$\text{(VI)}\left\|\begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 c'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_2 c''_x \end{matrix}\right\| = 0;$$

dans chaque colonne le facteur de α_3 d'un élément est le même que le facteur de α_2 de l'autre; mais on ne peut plus simplifier par soustraction.

Si les éléments d'une ligne ou de deux colonnes de P_1 sont identiquement nuls, on retrouve des types déjà rencontrés.

2° Lorsque dans N_3 les éléments de deux colonnes peuvent être annulés, donc si l'on a

$$b_{13} \equiv c_{13} \equiv b_{23} \equiv c_{23} \equiv 0,$$

les identités (P) deviennent

$$\left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{12} & c_{12} \\ a_{23} & b_{22} & c_{22} \end{matrix} \right\| = 0$$

et tous les modes d'évanouissement identique de cette matrice ramènent à des types déjà signalés.

Ainsi, *quand la matrice n'a que six formes linéaires et quand les paramètres n'y figurent qu'à la première puissance au plus, toutes les congruences linéaires se ramènent aux six types obtenus par l'analyse précédente.*

Ces formules présentent de nombreux cas particuliers. C'est ainsi que la *gerbe* G,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ a_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

considérée dans notre *Étude de quelques surfaces algébriques*, rentre dans tous les types précédents, sauf (III).

Nous n'entreprendrons pas ici l'étude des congruences contenant les paramètres à un degré supérieur; nous en verrons seulement un exemple au § 10 ci-après.

§ 6. *Points singuliers dans les six types de congruences.*

Appelons *point singulier* x un point x appartenant à une infinité simple de variétés de la congruence. Ces points sont en nombre simplement infini: il faut déterminer la figure qu'ils engendrent. Dans les congruences de cubiques gauches, la solution de ce problème nous donnera les directrices sur lesquelles s'appuient toutes les courbes du système. Auparavant nous esquissons la marche générale à suivre.

Soit la matrice

$$\| f_i(\alpha, x) \quad \varphi_i(\alpha, x) \|_1^3 = 0;$$

elle donne les trois équations

$$f_i(\alpha, x) + \varrho\, \varphi_i(\alpha, x) = 0. \qquad (i=1,2,3)$$

Si x est un point singulier, ces relations sont vérifiées pour ∞^1 systèmes de valeurs de $\varrho, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, et réciproquement. Or ceci peut arriver de deux manières: ou bien ϱ conserve la même valeur dans les ∞^1 systèmes et il suffit d'écrire que les trois dernières égalités sont indéterminées en α_1, α_2, α_3, en considérant ϱ, non comme variable, mais comme une constante inconnue; ou bien ϱ varie avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans les ∞^1 systèmes et alors on doit chercher la condition pour que les égalités soient indéterminées en ϱ, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Appliquons cette méthode au type (I) de congruences: l'équation

$$\alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x + \varrho\, d_x = 0$$

et les deux analogues en $a', b', \ldots a'', b'', \ldots$ sont indéterminées en $\varrho, \alpha_1, \alpha_2$, α_3 si l'on a

$$\| \; a_x \;\; b_x \;\; c_x \;\; d_x \; \|_1^3 = 0,$$

ce qui représente une variété du sixième ordre à $d-3$ dimensions.

Si ϱ est une constante inconnue, on peut poser $\varrho = \varrho_1 : \varrho_2$ et les équations sont indéterminées en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ si l'on a

$$\| \; \varrho_2 a_x \;\;\; \varrho_2 b_x \;\;\; \varrho_2 c_x \;\;\; \varrho_1 d_x \; \|_1^3 = 0.$$

Ces relations sont vérifiées: 1° pour $\varrho_1 = 0$ et $(a\,b\,c) = 0$, mais alors les équations déterminent les rapports de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; de sorte que, pour une indétermination de ces rapports, il faut l'évanouissement de tous les premiers mineurs de $(a\,b\,c)$ et ceci n'est possible en général que si les variables x sont au moins au nombre de cinq;

2° pour $\varrho_2 = 0$ et $d_x = d'_x = d''_x = 0$, conditions compatibles seulement quand le nombre des variables est au moins quatre, et alors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont complètement indéterminés, c'est-à-dire que les points x communs à d_x, d'_x, d''_x appartiennent à toutes les variétés de la congruence, ou en sont des *points fondamentaux.*

Dans l'espace ordinaire, les formules (I) représentent donc *une congruence linéaire de cubiques gauches passant par un point fixe et s'appuyant huit fois sur une sextique gauche de genre trois.* Le point fixe est le point $d\,d'd''$; la sextique est $\| a_x \, b_x \, c_x \, d_x \| = 0$, et chaque cubique $\| \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x \;\; d_x \| = 0$ coupe cette sextique aux points où elle coupe la surface cubique $| \; a_x \;\; \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x \;\; d_x \, | = 0$, sauf le point $(d\,d'd'')$.

Dans le plan, les formules (I) représentent *une congruence (ou involution) de triangles douée de six points singuliers.*

Il serait trop long d'exposer cette même question pour les cinq autres types de congruences linéaires. Contentons-nous d'énoncer les résultats pour le cas des cubiques.

Les cubiques gauches de la congruence (II) ont une bisécante commune et s'appuient, chacune par huit points, sur une courbe gauche du neuvième ordre.

Les formules (III) représentent une congruence de cubiques gauches ayant pour directrices une sextique de genre trois et deux cubiques gauches; chaque courbe de la congruence rencontre huit fois la sextique et une fois chaque cubique directrice; chaque cubique directrice rencontre huit fois la sextique.

La congruence du type (IV) est formée de cubiques gauches rencontrant quatre fois une sextique gauche de genre trois, rencontrant cinq fois une cubique gauche octosécante de la sextique directrice, et rencontrant une fois une droite bisécante de la sextique directrice.

Le type (V) est une congruence de cubiques gauches ayant pour directrices une cubique gauche, une quintique plane et une droite.

La congruence du type (VI) est formée de cubiques gauches coupant huit fois une sextique gauche de genre trois et coupant une fois une cubique gauche octosécante de la sextique.

La *gerbe G* déjà signalée plus d'une fois,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0$$

a visiblement les points fondamentaux et singuliers suivants: toutes ses courbes passent par deux points $(aa'a'')$, $(bb'b'')$ et ont trois bisécantes communes (ab), $(a'b')$, $(a''b'')$.

§ 7. *Classe d'une congruence de variétés algébriques.*

Appelons *classe* d'une congruence de variétés algébriques le nombre de fois qu'une droite arbitraire contient deux points x d'une des variétés.

Soit la congruence

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} f_{11}(\alpha, x) & f_{12}(\alpha, x) & f_{13}(\alpha, x) \\ f_{21}(\alpha, x) & f_{22}(\alpha, x) & f_{23}(\alpha, x) \end{matrix} \right\| = 0,$$

les formes f_{ik} étant du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_d$ et du degré p_i+q_k en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; et supposons $p_1 \geqq p_2$ $q_1 \geqq q_2 \geqq q_3$.

Si le point x parcourt une droite yz, on peut poser

$$\varrho x_h = y_h + t z_h \qquad (h=1, 2, \ldots, d),$$

les formes f_{ik} deviennent $f_{ik}(\alpha, y)+tf_{ik}(\alpha, z)$. Exprimons que la variété

$$\| f_{ik}(\alpha, y)+tf_{ik}(\alpha, z) \| = 0$$

contient deux points de la droite yz ou que les équations

$$f_{1k}(\alpha, y)+tf_{1k}(\alpha, z)+\omega f_{2k}(\alpha, y)+\omega t f_{2k}(\alpha, z)=0 \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3)}$$

sont compatibles pour deux systèmes de valeurs de ω et t; nous aurons

$$N \equiv \| f_{1k}(\alpha, y) \; f_{1k}(\alpha, z) \; f_{2k}(\alpha, y) \; f_{2k}(\alpha, z) \| = 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3)}$$

Omettons la seconde ou la quatrième colonne de cette matrice: les déterminants obtenus représentent deux courbes en α, de degrés respectifs $p_1+2p_2+\Sigma q$, $2p_1+p_2+\Sigma q$. De leurs intersections il faut défalquer les μ points qui rendent proportionnelles la première et la troisième colonne; or on sait que

$$\mu = p_1^2+p_2^2+p_1 p_2+\Sigma p \, \Sigma q+\Sigma q_1 q_2.$$

Si la congruence donnée est linéaire, $\mu-1$ des points α sont fixes; s'ils sont simples sur les *courbes* C pour la matrice M, ils le sont aussi en général pour les *courbes* C de la matrice N; alors le nombre variable de points α qui annulent N est

$$(2p_1+p_2+\Sigma q)\,(p_1+2p_2+\Sigma q)-2\mu+1 \equiv 3p_1 p_2+\Sigma p\,\Sigma q+q_1^2+q_2^2+q_3^2+1.$$

Telle est *en général* la classe d'une congruence linéaire. Si les nombres q sont tous nuls ainsi que p_2, cette classe est 1.

Voici donc la règle à suivre pour trouver la classe d'une congruence quand les formes de la matrice sont linéaires en x: on double la matrice dans le sens des lignes; on remplace, dans chaque moitié du nouveau symbole, les variables x par les coordonnées d'un point y ou d'un point z et l'on compte le nombre de points α variables qui annulent la nouvelle matrice.

En appliquant cette règle aux six types rencontrés plus haut et en donnant une attention spéciale aux points fixes α, on trouve que, seule, la

congruence du type (I), dans l'espace à trois dimensions, est toujours de première classe. Elle constitue le premier type de congruences linéo-linéaires trouvé par M. *Veneroni*.

Nous ne chercherons pas ici dans quels cas la classe des autres types de congruences s'abaisse. Mentionnons seulement ce cas particulier du type (II) qui est de première classe

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & a''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_3 g'_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

C'est le second type de congruence linéo-linéaire de M. *Veneroni*. Les cubiques de ce système ont une bisécante commune $a''d''$ et rencontrent chacune en quatre points deux cubiques gauches fixes,

$$\begin{Vmatrix} a_x & b'_x & a''_x \\ d'_x & f_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0, \qquad \begin{Vmatrix} a'_x & c'_x & a''_x \\ d'_x & g'_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

M. *Veneroni* a signalé le cas limite où ces deux cubiques coïncident.

§ 8. *Congruence G de triangles dans un plan.*

Les cubiques gauches d'une congruence marquent, dans un plan fixe, une congruence de triangles. L'étude de ces systèmes s'impose. Nous indiquons ici une couple de questions que l'on peut se poser à leur sujet et nous les résolvons pour une congruence spéciale G.

Soit en coordonnées x_1, x_2, x_3, une matrice de six formes linéaires,

$$\begin{Vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{Vmatrix} = 0,$$

représentant les sommets d'un triangle ABC dans un plan.

Cherchons les coniques pour lesquelles ce triangle est autopolaire. Soit Γ une de ces coniques, et son équation tangentielle

$$\Gamma \equiv \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0;$$

l'équation ponctuelle d'une conique variable circonscrite à ABC est

$$|\lambda a_x b_x| \equiv \Sigma B_{ik} x_i x_k = 0, \qquad [B_{ii} = (\lambda a_i b_i), \; 2B_{ik} = |\lambda a_i b_k| + |\lambda a_k b_i|].$$

Si le triangle ABC est autopolaire pour Γ, un invariant simultané connu de ces deux coniques s'évanouit et l'on a

$$\Sigma A_{ik} B_{ik} \equiv \Sigma A_{ik}(\lambda a_i b_k) = 0,$$

quels que soient $\lambda, \lambda', \lambda''$; et la réciproque est aisée. On a donc

$$(s) \quad \begin{cases} \Sigma A_{ik}(a'_i b''_k - a''_i b'_k) = 0, \\ \Sigma A_{ik}(a''_i b_k - a_i b''_k) = 0, \\ \Sigma A_{ik}(a_i b'_k - a'_i b_k) = 0. \end{cases}$$

Entre ces relations et l'équation $\Gamma = 0$, on peut éliminer trois des six quantités A_{ik} et l'on obtient le réseau tangentiel de coniques pour lesquelles ABC est un triangle autopolaire.

Si le triangle ABC décrit une congruence T, les coefficients des formes $a_x, b_x, \dots$ dépendent de trois paramètres homogènes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. L'élimination de ces paramètres entre les équations (s) donne, entre les coefficients A_{ik}, une relation définissant les ∞^4 coniques dont chacune admet pour autopolaire un triangle de la congruence T.

Les conditions pour que les équations (s) soient satisfaites pour ∞^1 valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ donnent quatre relations en A_{ik}, elles définissent une infinité simple de coniques dont chacune admet pour autopolaires ∞^1 triangles de la congruence T. Enfin, pour que les équations (s) soient satisfaites pour toutes les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il faut, en général, neuf conditions; en éliminant les A_{ik} on a encore quatre conditions imposées aux formes figurant dans la représentation de T pour que tous les triangles de cette congruence soient autopolaires pour une même conique.

On pourrait appliquer ces généralités aux six types de congruences rencontrés plus haut. Ici nous ne considérons que l'involution spéciale G des triangles vérifiant les relations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les triangles ont visiblement pour sommets les points doubles des ∞^2 collinéations où les droites a, a', a'' correspondent respectivement à b, b', b''.

Les équations (s) de tantôt deviennent ici

$$(s')\quad \begin{cases} 0 & +\alpha_2 \Sigma A_{ik}\, a_i' b_k'' & -\alpha_3 \Sigma A_{ik}\, a_i'' b_k' = 0, \\ -\alpha_1 \Sigma A_{ik}\, a_i b_k'' & +0 & +\alpha_3 \Sigma A_{ik}\, a_i'' b_k = 0, \\ \alpha_1 \Sigma A_{ik}\, a_i b_k' & -\alpha_2 \Sigma A_{ik}\, a_i' b_k & +0 \quad = 0. \end{cases}$$

1° L'élimination simple de α donne

$$S \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Sigma A_{ik} a_i' b_k'' & -\Sigma A_{ik}\, a_i'' b_k' \\ -\Sigma A_{ik} a_i b_k'' & 0 & \Sigma A_{ik}\, a_i'' b_k \\ \Sigma A_{ik} a_i b_k' & -\Sigma A_{ik}\, a_i' b_k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Pour que les équations (s') admettent ∞^1 systèmes de valeurs des α, il faut que tous les premiers mineurs du déterminant S soient nuls. En analysant tous les cas possibles, on trouve le résultat suivant dont nous omettons la démonstration: il existe neuf faisceaux de coniques telles que chacune admet ∞^1 triangles autopolaires ayant pour sommets des points doubles de collinéations où se correspondent deux triangles donnés $aa'a''$ et $bb'b''$; les coniques de chaque faisceau ont un double contact sur un côté d'un des triangles donnés ou sur la droite joignant deux de leurs sommets homologues.

3° Pour que les équations (s) soient satisfaites pour toutes les valeurs des α, il faut que tous les éléments du déterminant S soient nuls. Or si, pour une certaine conique $\Gamma \equiv \Sigma A_{ik}\, u_i u_k = 0$, on a, par exemple, $\Sigma A_{ik} a_i' b_k'' = 0$, c'est que les droites a' et b'' sont conjuguées par rapport à cette courbe. Si donc tous les éléments de S sont nuls, c'est qu'il existe une conique T pour laquelle les côtés a, a', a'' du triangle $aa'a''$ sont respectivement conjugués aux couples de côtés b', b''; b'', b; b, b' du triangle $bb'b''$; ces deux triangles sont donc conjugués par rapport à cette conique Γ et par suite sont homologiques. Et réciproquement.

Si l'on associe chacun à chacun les côtés de deux triangles, ces trois couples de droites définissent une double infinité de collinéations dans le plan; pour que les points doubles de ces collinéations forment des triangles autopolaires par rapport à une même conique, il faut et il suffit que les deux triangles proposées soient homologiques.

Dans une congruence *linéaire* de triangles d'un plan, à chaque sommet y d'un de ces triangles répond, sans ambiguïté, le côté opposé

$u_x = 0$. Nous cherchons la représentation explicite de cette correspondance (y, u) pour la congruence G de triangles, en supposant que les droites b, b', b'' forment un triangle auquel on peut rapporter la figure. Les équations de la congruence sont alors

$$\frac{a_1 a_x}{x_1} = \frac{a_2 a'_x}{x_2} = \frac{a_3 a''_x}{x_3}.$$

On voit aisément que le triangle particulier T de sommet y et de base $u_x = 0$ a pour équations

$$\frac{y_1 a_x}{x_1 a_y} = \frac{y_2 a'_x}{x_2 a'_y} = \frac{y_3 a''_x}{x_3 a''_y}.$$

Deux coniques circonscrites à T, par exemple

$$y_1 x_2 a_x a'_y - x_1 y_2 a'_x a_y = 0, \qquad y_1 x_3 a_x a''_y - x_1 y_3 a''_x a_y = 0$$

ont quatre points communs: le point y, le point z commun aux droites $x_1 = 0$ et $a_x = 0$, enfin deux points sur la droite u. Ces coniques définissent un faisceau ponctuel dont un élément se compose de la droite u et de la droite yz dont l'équation est

$$y_1 a_x - x_1 a_y = 0.$$

Ainsi l'on doit avoir, pour des valeurs convenables de k, u_1, u_2, u_3 l'identité

$$y_1 x_2 a_x a'_y - x_1 y_2 a'_x a_y + k(y_1 x_3 a_x a''_y - x_1 y_3 a''_x a_y) \equiv u_x (y_1 a_x - x_1 a_y).$$

En identifiant ces deux expressions terme à terme, on trouve, après quelques calculs,

$$(c) \quad \begin{cases} \sigma u_1 = a_y (a'_1 a''_1 y_1 + a'_1 a''_2 y_2 + a'_3 a''_1 y_3), \\ \sigma u_2 = a'_y (a''_1 a_2 y_1 + a''_2 a_2 y_2 + a''_2 a_3 y_3), \\ \sigma u_3 = a''_y (a_3 a'_1 y_1 + a_2 a'_3 y_2 + a_3 a'_3 y_3). \end{cases}$$

On constate aisément que *cette correspondance (y, u) est quadratique et birationnelle.*

On vérifie qu'elle devient linéaire quand le triangle $a a' a''$ et le triangle de référence $b b' b''$ sont homologiques.

§ 9. *Propriété de la congruence G de cubiques gauches.*

Supposons les formes $a_x, b_x, \ldots$ linéaires et quaternaires; nous allons compléter en un point la théorie de la congruence G de cubiques gauches, plusieurs fois citée,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les courbes de cette congruence percent un plan, par exemple $x_4 = 0$, en des ternes de points formant une congruence G de triangles; les équations de ce système de triangles sont celles de la congruence de cubiques, pourvu que l'on regarde les formes $a_x, b_x, \ldots$ comme ternaires (en x_1, x_2, x_3). Nous supposons les quatre plans x_4, b_x, b'_x, b''_x sans point commun.

Les triangles marqués dans le plan x_4 par les courbes de la gerbe G peuvent (§ 8) être autopolaires pour une même conique; cela se produit quand, dans le domaine ternaire, les triangles $aa'a''$ et $bb'b''$ sont homologiques. Ces triangles sont les sections, par le plan x_4, des trièdres $aa'a''$ et $bb'b''$ obtenus en projetant des deux points fixes de la congruence, $(aa'a'')$ et $(bb'b'')$, les trois bisécantes communes (ab), $(a'b')$, $(a''b'')$.

En réponse à une question de M. *J. Neuberg*, nous avons démontré (*Mathesis*, 1903, p. 74) que les plans coupant deux trièdres suivant deux triangles homologiques enveloppent une quadrique ayant pour génératrices d'un même système les intersections des faces correspondantes des deux trièdres. Donc, *toutes les cubiques gauches passant par deux points fixes et douées de trois bisécantes fixes marquent, dans un plan,* ∞^2 *triangles; les côtés de ces triangles, répondent aux sommets opposés dans une transformation quadratique birationnelle* (formules (c) du § 8). *Pour que ces triangles soient autopolaires par rapport à une même conique, il faut et il suffit que leur plan coupe, suivant deux triangles homologiques, les trièdres obtenus en projetant, des deux points fixes, les trois bisécantes communes. Les plans qui jouissent de cette propriété touchent la quadrique admettant les trois bisécantes comme génératrices d'un même système.*

Si les trois bisécantes sont dans un plan, elles forment un triangle CDE; soient A, B les deux autres points fixes des cubiques. La congruence est maintenant une *gerbe de Reye* (cubiques par cinq points A, B, C, D, E). Les trièdres projetant, de A et B, le même triangle CDE sont coupés par tout plan suivant deux triangles homologiques. Donc, *les cubi-*

ques gauches par cinq points déterminent, dans tout plan, un système de triangles autopolaires pour une même conique.

Cette propriété est connue; on ignorait seulement pourquoi elle appartient à la *gerbe de Reye* et non aux autres congruences.

Dans le cas particulier où la congruence G se réduit à la *gerbe de Sturm* (cubiques ayant même tétraèdre d'osculation), l'interprétation des formules (c) du § 8 fait retrouver ce résultat que nous avons établi dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (1900):

Les cubiques de la gerbe de Sturm marquent, dans un plan, ∞^2 triangles; la correspondance entre le sommet d'un de ces triangles et le côté opposé est le produit d'une inversion et d'une réciprocité.

§ 10. *Cubiques gauches à cinq bisécantes communes.*

Appelons $y^I z^I$, $y^{II} z^{II}$, $y^{III} z^{III}$, $y^{IV} z^{IV}$, $y^V z^V$ cinq droites fixes définies chacune par deux points. Prenons, sur la première, deux autres points H, L ayant pour coordonnées respectivement

$$y_i^I + h z_i^I, \qquad y_i^I + l z_i^I.$$

Les six plans menés par chacun de ces points et par les trois droites $y^{II} z^{II}$, $y^{III} z^{III}$, $y^{IV} z^{IV}$ ont pour équations

$$\begin{aligned}
a_x &\equiv (x\, y^I\, y^{II}\, z^{II}) + h\,(x\, z^I\, y^{II}\, z^{II}) \equiv A + h A' = 0, & b_x &\equiv A + l A' = 0,\\
a'_x &\equiv (x\, y^I\, y^{III}\, z^{III}) + h\,(x\, z^I\, y^{III}\, z^{III}) \equiv B + h B' = 0, & b'_x &\equiv B + l B' = 0,\\
a''_x &\equiv (x\, y^I\, y^{IV}\, z^{IV}) + h\,(x\, z^I\, y^{IV}\, z^{IV}) \equiv C + h C' = 0, & b''_x &\equiv C + l C' = 0.
\end{aligned}$$

La congruence de cubiques passant par les points H, L et admettant les trois bisécantes $y^{II} z^{II}$, $y^{III} z^{III}$, $y^{IV} z^{IV}$ a pour équations

$$G \equiv \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Une bisécante d'une de ces courbes a pour équations

$$\lambda\, \alpha_1 a_x + \mu\, \alpha_2 a'_x + \nu\, \alpha_3 a''_x = 0,$$
$$\lambda\, b_x + \mu\, b'_x + \nu\, b''_x = 0.$$

Exprimons que cette bisécante passe par les points y^V et z^V; des quatre relations ainsi obtenues, éliminons les paramètres linéaires λ, μ, ν;

résolvons les deux relations restantes par rapport à α_1, α_2, α_3 et substituons dans la matrice G; nous obtenons l'équation de la cubique qui passe par les points H, L et qui a pour bisécante les droites $y^{II} z^{II}$, $y^{III} z^{III}$, $y^{IV} z^{IV}$, $y^{V} z^{V}$:

$$\left\| \begin{matrix} a_x (a'_{yV}\, a''_{zV}) & a'_x (a''_{yV}\, a_{zV}) & a''_x (a_{yV}\, a'_{zV}) \\ b_x (b'_{yV}\, b''_{zV}) & b'_x (b''_{yV}\, b_{zV}) & b''_x (b_{yV}\, b'_{zV}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les symboles a et b ont été définis plus haut. Nous voyons que cette dernière matrice a des éléments linéaires en x; ceux de la première ligne sont cubiques en h, ceux de la seconde sont cubiques en l; et les deux lignes ne diffèrent que par la substitution de h à l. Si l et h varient, on a ∞^2 cubiques gauches ayant cinq bisécantes données; on peut rendre les paramètres homogènes.

La congruence de cubiques gauches à cinq bisécantes communes est représentée par une matrice de six formes linéaires contenant les paramètres variables au troisième degré; un paramètre manque dans chaque ligne et les deux lignes ne diffèrent que par le nom des paramètres.

Inversement, toute matrice contenant les paramètres α_1, α_2, α_3 au degré n, mais où α_3 manque dans une ligne et α_2 dans l'autre, et où les deux lignes ne diffèrent que par le nom des paramètres représente une congruence de variétés algébriques dont l'ordre est $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; car, pour chaque point x l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} f(\alpha_1, \alpha_2) & \varphi(\alpha_1, \alpha_2) & \psi(\alpha_1, \alpha_2) \\ f(\alpha_1, \alpha_3) & \varphi(\alpha_1, \alpha_3) & \psi(\alpha_1, \alpha_3) \end{matrix} \right\|$$

est la condition pour que la courbe plane unicursale

$$X_1 : X_2 : X_3 = f(\alpha_1, \alpha_2) : \varphi(\alpha_1, \alpha_2) : \psi(\alpha_1, \alpha_2)$$

ait un point double; or cette courbe a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ nœuds. En particulier, si $n = 3$, la congruence est linéaire. Ainsi apparaît une relation inattendue entre les deux faits géométriques suivants, traduits par les mêmes formules analytiques:

Une cubique plane rationnelle a un point double et un seul.	*Un point et cinq bisécantes définissent une cubique gauche et une seule.*

On peut étudier autrement les cubiques gauches à cinq bisécantes communes:

Pour établir qu'une gerbe de cinq plans π_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ est projective à une autre gerbe π'_i, on exprime: 1[0] que les traces des plans π_2,

π_3, π_4, π_5 dans le plan π_1 forment un faisceau projectif au faisceau homologue donné, c'est-à-dire que le rapport anharmonique de ce faisceau a une valeur donnée,

$$\pi_1(\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5) = \pi_1'(\pi_2'\pi_3'\pi_4'\pi_5') = \mu,$$

2° que les traces de $\pi_1, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ dans le plan π_2 ont aussi un rapport anharmonique donné,

$$\pi_2(\pi_1\pi_3\pi_4\pi_5) = \pi_2'(\pi_1'\pi_3'\pi_4'\pi_5') = \nu.$$

Ayant ainsi fixé la projectivité des deux gerbes, on suppose que les plans π_i passent par cinq droites données; le sommet de la gerbe (π) décrit une cubique gauche dont nous cherchons les équations et qui a pour bisécantes les cinq droites.

D'abord, étant donné cinq droites $d^I, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V$, il faut trouver le lieu d'un point x tel qu'en projetant quatre de ces droites $(d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V,)$ de ce point x suivant quatre plans $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$, ces plans coupent le plan $\pi_1 \equiv (xd^I)$ suivant un faisceau de rayons de rapport anharmonique μ. Dans un plan (xd^I) les points répondant à la question décrivent une conique c_2; celle-ci s'appuie sur les quatre droites $d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V$ en quatre points dont le rapport anharmonique sur la conique est μ; quand le plan (xd^I) tourne autour de d^I, cette conique c_2 engendre le lieu cherché, à savoir une certaine surface $S_{\mu 4}$, que nous avons rencontrée incidemment dans notre *Étude de quelques surfaces algébriques.*

Cherchons l'équation de $S_{\mu 4}$. Les cinq droites, supposées indépendantes, son, comme plus haut, définies chacune par deux points $(y^I z^I, y^{II} z^{II}, y^{III} z^{III}, y^{IV} z^{IV}, y^V z^V)$. Soit $y_i^I + k_1 z_i^I$ le point où la première droite perce le plan mené par la seconde et par un point quelconque x de l'espace; ces quatre points $x, y^I + k_1 z^I, y^{II}, z^{II}$ sont dans un même plan et l'on a

$$k_1 = -\frac{(x\, y^I\, y^{II}\, z^{II})}{(x\, z^I\, y^{II}\, z^{II})} = -\frac{A}{A^I},$$

les lettres $A, A^I, \ldots$ ayant la même signification que plus haut.

Les points où $y^I z^I$ perce les plans $(x\, y^{III} z^{III}), (x\, y^{IV} z^{IV}), (x\, y^V z^V)$ étant de même désignés par $y^I + k_2 z^I, y^I + k_3 z^I, y^I + k_4 z^I$, on a pareillement

$$k_2 = -\frac{B}{B^I}, \quad k_3 = -\frac{C}{C^I}, \quad k_4 = -\frac{D}{D^I}.$$

D'après l'énoncé de la question, on doit avoir

$$\mu = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_4} : \frac{k_2 - k_3}{k_2 - k_4},$$

d'où successivement

$$(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)\,\mu = (k_1 - k_3)(k_2 - k_4),$$

$$S_{\mu 4} \equiv (AD' - A'D)(BC' - B'C)\mu - (AC' - A'C)(BD' - B'D) = 0.$$

La surface est du quatrième ordre; elle admet la droite 1 (ou $y\ z'$) pour droite double, les droites 2, 3, 4, 5 pour droites simples, ainsi que les quatre couples de droites e qui rencontrent respectivement les groupes de droites 1234, 1235, 1245, 1345, et enfin les huit droites f complétant, avec les droites e, les sections faites par les plans (1, e). On démontre facilement que la surface n'a pas d'autres droites.

La fonction $AD' - A'D$ s'annule pour les points d'une quadrique engendrée par les faisceaux projectifs de plans $A = hA'$, $D = hD'$ qui ont pour axes respectifs les droites 2 et 5 données; les plans homologues de ces faisceaux,

$$(xy'y''z'') - h(xz'y''z'') = 0, \qquad (xy'y^{V}z^{V}) - h(xz'y^{V}z^{V}) = 0.$$

passent par le point $y' - hz'$ de la droite 1; la quadrique en question a donc les droites 1, 2, 5 pour génératices d'un même système; désignons en abrégé, son équation par (125). Au moyen de symboles pareils, l'équation de $S_{\mu 4}$ peut s'écrire

$$S_{\mu 4} \equiv (125)(134)\mu - (124)(135) = 0.$$

Intervertissons les rôles des droites 1 et 2 et donnons au rapport anharmonique une autre valeur ν; nous aurons une autre surface $S'_{\nu 4}$ ayant la droite 2 pour droite double et encore vingt droites simples; son équation est

$$S'_{\nu 4} \equiv (125)(234)\nu - (124)(235) = 0.$$

L'intersection des surfaces $S_{\mu 4}$ et $S'_{\nu 4}$ comprend: 1° les droites 1 et 2 dont chacune est double sur une surface et simple sur l'autre; 2° les droites simples 3, 4, 5; 3° les trois couples de droites e rencontrant 1 et 2, ainsi que deux des droites 3, 4, 5; 4° une cubique gauche c_3 admettant les cinq droites données comme bisécantes.

Les équations des surfaces $S_{\mu 4}$ et $S'_{\nu 4}$ donnent

$$\begin{Vmatrix} (124) & \mu(134) & \nu(234) \\ (125) & (135) & (235) \end{Vmatrix} = 0.$$

Ces relations représentent un système de lignes d'ordre total égal à douze. Quels que soient μ et ν, elles sont vérifiées par les mêmes droites suivantes: 1° les cinq droites données, 2° les deux couples de droites rencontrant à la fois 1, 2, 3, 4 ou 1, 2, 3, 5, car ces droites annulent tous les éléments d'une ligne ou de deux colonnes de la matrice. De plus, pour chaque système de valeurs de μ et ν, la matrice s'annule pour une cubique gauche c_3. Donc, si μ et ν sont des paramètres variables, *la matrice précédente réprésente la congruence de cubiques gauches admettant cinq bisécantes données.*

L'avantage d'avoir des paramètres linéaires est compensé par l'inconvénient de trouver chaque courbe de la congruence accompagnée de neuf droites parasites.

Über die Darstellung der Primzahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate.

Von Herrn *Ernst Jacobsthal* in Berlin.

Es sei p eine ungerade Primzahl und m eine nicht durch p teilbare ganze Zahl, dann setzen wir mit *Legendre*

$$\left(\frac{m}{p}\right)=\pm 1,$$

je nachdem die Kongruenz

$$x^2 \equiv m \mod p$$

eine Lösung hat oder nicht; ist aber m durch p teilbar, so sei $\left(\frac{m}{p}\right)=0$. Es ist dann stets

$$\left(\frac{m}{p}\right) \equiv m^{\frac{p-1}{2}} \mod p.$$

§ 1. *Herleitung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste.*

Wir betrachten den Ausdruck

$$f(b, c)=\sum_{m=1}^{p}\left(\frac{m^2+bm+c}{p}\right).$$

Es ergibt sich leicht, daß

$$f(b, c)=\psi(D)=\sum_{m=1}^{p}\left(\frac{m^2-D}{p}\right)$$

ist, falls wir $b^2-4c=D$ setzen.

Wendet man auf der rechten Seite der Kongruenz

$$\psi(D) \equiv \sum_{m=1}^{p}(m^2-D)^{\frac{p-1}{2}}$$

den binomischen Lehrsatz an und benutzt sodann die bekannten Kongruenzen

$$\sum_{m=1}^{p-1} m^s \equiv \begin{matrix} -1 \bmod p \text{ für } s \equiv 0 \bmod p-1, \\ 0 \bmod p \text{ für } s \not\equiv 0 \bmod p-1, \end{matrix}$$

so ergibt sich $\psi(D) \equiv -1 \bmod p$, also $\psi(D) = -1$ oder $= p-1$. Da sich nun zeigt, daß

$$\sum_{D=1}^{p} \psi(D) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{D=1}^{p} \left(\frac{m^2-D}{p}\right) = 0$$

ist, so folgt: für $p-1$ Werte D ist $\psi(D) = -1$ und für einen Wert $= p-1$; nun ist $\psi(p) = p-1$, also ergibt sich

$$\psi(D) = p-1-p\left(\frac{D}{p}\right)^2.$$

Oder in anderer Schreibweise erhalten wir

1) $$\sum_{m=1}^{p} \left(\frac{m^2+bm+c}{p}\right) = p-1-p\left(\frac{b^2-4c}{p}\right)^2. *)$$

Aus der allgemeinen Formel der Anmerkung folgt für $f(m) = \left(\frac{m+e_1}{p}\right)$, $e = e_2$

2) $$\sum_{m=1}^{p} \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^2+e_1 m+e_2}{p}\right) = \sum_{m=1}^{p} \left(\frac{m+e_1}{p}\right)\left(\frac{m^2-4e_2}{p}\right). **)$$

§ 2. *Die Darstellung der Primzahlen* $p = 4n+1$ *als Summe zweier Quadrate.*

Wir setzen

1) $$\varphi(e) = \sum_{m=1}^{p} \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^2+e}{p}\right).$$

---

*) Die Formel 1) ist enthalten in der allgemeinen Gleichung

$$\sum_{m=1}^{p} f(m)\left(\frac{m^2-4e}{p}\right) = -\left(\frac{4e}{p}\right)^2 \sum_{m=1}^{p} f(m) + \sum_{m=1}^{p-1} f\left(m+\frac{e}{m}\right);$$

hier ist $f(m)$ eine eindeutige Funktion ihres Argumentes m und p eine Periode desselben. Der Beweis dieser Formel kann aus meiner Inaug.-Diss. Berlin 1906, S. 9 ff. entnommen werden. Dort ist zwar $f(m)$ spezialisiert, beim Beweise wird aber davon kein Gebrauch gemacht.

**) Die Gleichung 2) läßt sich ohne Schwierigkeit aus 1) durch eine einfache Rechnung herleiten.

Es ist $\varphi(e)$ stets gerade und $\varphi(0)=0$.

Es sei x eine beliebige, nicht durch p teilbare Zahl, dann ist

$$\varphi(e)=\left(\frac{x}{p}\right)^4\varphi(e)=\left(\frac{x}{p}\right)\sum_{m=1}^{p}\left(\frac{xm}{p}\right)\left(\frac{(xm)^2+ex^2}{p}\right),$$

also ergibt sich

$$2)\qquad \varphi(e)=\left(\frac{x}{p}\right)\varphi(ex^2).$$

Somit hängt $\varphi^2(e)$ nur von der Restklasse ab, der e angehört, und daraus folgt

$$\alpha)\qquad \sum_{e=1}^{p}\varphi^2(e)=\frac{p-1}{2}\left\{\varphi^2(r)+\varphi^2(n)\right\},$$

wo r ein beliebiger quadratischer Rest, n ein beliebiger Nichtrest ist.

Berechnet man nun andererseits $\sum_{e=1}^{p}\varphi^2(e)$ direkt, indem man für $\varphi(e)$ Wert aus 1) einsetzt und zuerst über e summiert, wobei eben Formel 1) den aus § 1 zur Anwendung gelangt, so ergibt sich

$$\beta)\qquad \sum_{e=1}^{p}\varphi^2(e)=\left\{1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right\}p(p-1).$$

Für $p=4n+1$ folgt aus der Vergleichung von α) und β)

$$3)\qquad p=\left\{\frac{\varphi(r)}{2}\right\}^2+\left\{\frac{\varphi(n)}{2}\right\}^2;^{*)}$$

hierin ist $\varphi(e)$ durch 1) erklärt und r, n sind beliebige Reste resp. Nichtreste von p. Aus der Gleichung 2) in § 1 folgt für $e_1=0$, $e_2=e$

$$4)\qquad \varphi(e)=\left(\frac{2}{p}\right)\varphi(-e).$$

Wir setzen nun $r=-1$ und

$$a=\tfrac{1}{2}\varphi(-1)=\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^2-1}{p}\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m+1}{p}\right)\left(\frac{m+2}{p}\right)$$

$$=\sum_{1}^{\frac{p-3}{2}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m+1}{p}\right)\left(\frac{m+2}{p}\right).$$

*) Formel 3) läßt sich verallgemeinern. Vgl. a. a. O. S. 20 ff.

Hieraus folgt, daß a die ungerade Basis, also

$$b=\tfrac{1}{2}\varphi(n)$$

gerade ist. Wir können nun aber a leicht mod 8 bestimmen. $N^{(3)}$ gebe an, wie oft 3 Nichtreste in der Reihe $1, 2, 3, \ldots, p-1$ auf einander folgen. Dann ist $N^{(3)}$ für $p=4n+1$ gerade und

$$8\,N^{(3)}=\sum_{m=1}^{p-3}\left\{1-\left(\frac{m}{p}\right)\right\}\left\{1-\left(\frac{m+1}{p}\right)\right\}\left\{1-\left(\frac{m+2}{p}\right)\right\}.$$

Rechnet man diese Summe aus, dann folgt

$$8\,N^{(3)}=p-3-2a\equiv 0 \mod 16,$$

also

5) $$a\equiv\frac{p-3}{2} \mod 8.$$

Wenn also $p=a^2+b^2$ gegeben ist, dann bestimmt sich das Zeichen von a aus 5); eine entsprechende Zeichenbestimmung für b ist mir selbst im Fall $p=8n+5$ nicht gelungen, in dem ich doch $2b=\varphi(\pm 2)$ setzen kann. — In § 1 hatten wir erschlossen $\psi(D)\equiv -1 \mod p$; auf analoge Weise erhalten wir hier

6) $$a\equiv\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{p+3}{4}}\frac{\frac{p-1}{2}!}{\left(\frac{p-1}{4}!\right)^2} \mod p$$

und wegen

$$b\equiv\pm a\,\frac{p-1}{2}!$$

7) $$b\equiv\mp\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{p+3}{4}}\frac{1}{\left(\frac{p-1}{4}!\right)^2} \mod p.$$

Aus 6) und 7) werden a und b als absolut kleinste Reste erhalten.

Wir wollen nunmehr den Zusammenhang der hier für die Basen entwickelten Formeln mit den Basenausdrücken aufdecken, die man auf

viel schwierigerem Wege aus der Theorie der biquadratischen Reste und der Lehre von der Kreisteilung gewinnt.*)

a', b' seien die *Gauß*schen Basen,**) a'', b'' seien die Basen, die die Kreisteilung liefert:

$$a''+b''i=\sum_{\mu=1}^{p-2} i^{\operatorname{ind}(\mu+\mu^2)}.$$

Betrachten wir die ungerade Basis: a, a', a''. — Zusammenhang von a' und a:

In der zitierten Arbeit leitet *Gauß* (S. 90) die Kongruenz her

$$\sum_{x=1}^{p-1}(x^4+1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 4(0,0)-4(0,1)+4(0,2)-4(0,3).$$

Aus ihrer Herleitung folgt, daß die Gleichung gilt

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x^4+1}{p}\right)=4(0,0)-4(0,1)+4(0,2)-4(0,3).$$

Führt man hier für die Symbole (i,k), deren Bedeutung in Art. 15 erklärt wird, die Werte aus Art. 18, 20 ein, entsprechend den beiden Fällen $p=8n+1,5$, so folgt

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x^4+1}{p}\right)=-2a'-2,$$

oder

$$-2a'-2=2\sum_{r}\left(\frac{r^2+1}{p}\right),$$

wo hier über die Reste zwischen 1 und $p-1$ summiert wird. Dazu nehmen wir

$$\sum_{r}\left(\frac{r^2+1}{p}\right)+\sum_{n}\left(\frac{n^2+1}{p}\right)=-2$$

und

$$\sum_{r}\left(\frac{r^2+1}{p}\right)-\sum_{n}\left(\frac{n^2+1}{p}\right)=\sum_{m=1}^{p}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^2+1}{p}\right)=\varphi(1),$$

wo n die Summation über alle inkongruenten Nichtreste andeutet.

---

*) Die Kenntnis dieses Zusammenhanges verdanke ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn *Frobenius*.

**) *Gauß*, Werke Bd. 2: Theoria resid. biqu. Comm. prima.

Hieraus folgt

$$2a' = -\varphi(1)$$
$$= -\left(\frac{2}{p}\right)\varphi(-1),$$

wegen (4). Daher ist

$$2a' = -\left(\frac{2}{p}\right)2a$$

und

$$a' = -\left(\frac{2}{p}\right)a.$$

a läßt sich also aus a' entwickeln.

Zusammenhang von a'' mit a:

Am leichtesten entwickelt man a aus a'', wenn man den Weg über a' nimmt. Wir führen den Übergang indessen direkt aus. Es ist:

$$a'' = \Re\left(\sum_{\mu=1}^{p-2} i^{\operatorname{ind}(\mu+\mu^2)}\right) = A - B.$$

A gibt dabei an, wie viele biquadratische Reste die Reihe

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4, \ldots\ (p-2)\cdot(p-1)$$

enthält; B gibt an, wie viele Zahlen dieser Reihe zugleich quadratische Reste und biquadratische Nichtreste sind. Dann ist

$$A + B = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p-2}\left\{1+\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m+1}{p}\right)\right\} = \frac{p-3}{2}.$$

Also folgt

$$a'' = A - B = 2A - \frac{p-3}{2}.$$

Da nun

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}$$

biquadratischer Rest ist, so ist

$$A = 2r + 1,$$

wo r die Anzahl der biquadratischen Reste der Reihe

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4, \ldots, \frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}$$

angibt. Also folgt

$$a'' = 4r - \frac{p-7}{2}.$$

Nun ist

$$2a = \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m - \frac{1}{m}}{p} \right) = \sum_{x,y} \left(\frac{x+y}{p} \right),$$

wo über alle Zahlenpaare x, y zu summieren ist, für die

$$x \cdot y \equiv -1 \quad \bmod p$$

ist. Es ist also

$$2a = A' - B',$$
$$p - 3 = A' + B'.$$

Daraus folgt

$$a = A' - \frac{p-3}{2};$$

hierin gibt A' an, wie oft

$$x + y \equiv 4w^2$$

quadratischer Rest von p ist. x, y genügen also der Kongruenz

$$z^2 - 4w^2 z - 1 \equiv 0,$$
$$(z - 2w^2)^2 \equiv 4w^4 + 1 \equiv v^2,$$
$$w^4 \equiv \frac{v-1}{2} \cdot \frac{v+1}{2}.$$

Nehmen wir für v die Zahlen $3, 5, \ldots, p-2$, so erhalten wir daraus r biquadratische Reste w^4, für die die Kongruenz $z^2 - 4w^2 z - 1 \equiv 0$ stets 2 verschiedene Lösungen z_1, z_2 hat. Wir können dann

$$x = z_1, \quad y = z_2$$

und

$$x = z_2, \quad y = z_1$$

setzen. Da nun $-x - y = 4w^2$ auf denselben biquadratischen Rest führen, so folgt: Die obigen r biquadratischen Reste liefern $4r$ Zahlenpaare x, y; dazu kommen noch 2, die von

$$v = p, \quad w^4 \equiv \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}$$

herrühren; also ist

$$A' = 4r + 2$$

und

$$a = 4r - \frac{p-7}{2}.$$

Es war

$$a'' = 4r - \frac{p-7}{2}.$$

Somit ergibt sich

$$a'' = a.$$

Drückt man r **durch die** *Gaußschen* **Größen** (i, k) **aus,**

$$[2r + 1 = (0,0) + (1,3) + (2,2) + (3,1)],$$

so liefern die vorstehenden Formeln wieder den Zusammenhang zwischen a **und** a'; a' **und** a''.

Für die gerade Basis ist mir ein entsprechender Übergang nicht bekannt.

Berichtigung:

Es muß heißen:

S. 161 Z. 7 v. o.:

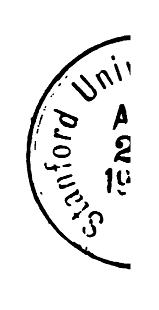
$\mathfrak{S}_{1n+h}$ statt $\mathfrak{S}_{1r+h}$.

S. 162 Formel (12):

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{t})=\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^h \mathfrak{c}_h \cdot t^{n-h} \text{ statt } \mathfrak{F}(\mathfrak{t})=\prod_{h=1}^{h=n}(-1)^h \mathfrak{c}_h \cdot t^{n-h}.$$

S. 180 Z. 1 v. o.:

$\zeta^{h(p-1)}$ statt $h(p-1)$.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 132.

Heft IV.

Ausgegeben den 30. Juli.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1907.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 132. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.

Der grundlegende Satz von *Fuchs*, der die notwendige und hinreichende Form der Koeffizienten einer homogenen linearen Differentialgleichung in der Umgebung eines Punktes feststellt, der für die Integrale kein Punkt der Unbestimmtheit ist, kann für Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung so ausgesprochen werden, daß ein solches System, dessen Koeffizienten in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $x=a$ eindeutig, und dessen Integrale daselbst nicht unbestimmt sind, stets auf ein *kanonisches* System

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{P_{\lambda k}(x)}{x-a} y_\lambda, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

wo die $P_{ik}(x)$ in der Umgebung von $x=a$ holomorphe Funktionen bedeuten, zurückgeführt werden kann, und daß umgekehrt ein System von der Form (A) so beschaffen ist, daß seine Lösungen im Punkte $x=a$ nicht unbestimmt werden. Der Beweis des zweiten Teiles dieses Satzes wurde bisher stets in der Weise erbracht, daß man nach Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen aufstellte, die für die y_k eingesetzt, dem Systeme (A) formell Genüge leisten, und dann die Konvergenz dieser Reihen bewies. Ich möchte im folgenden einen direkten und sehr einfachen Beweis für diese Tatsache mitteilen, der dem Verfahren nachgebildet ist, mit Hilfe dessen man*) zu zeigen pflegt, daß das Integral

$$\text{(B)} \qquad \int_b^a \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^{1-\alpha}},$$

*) Vergl. z. B. *C. Jordan*, Cours d'Analyse II (1894), S. 260.

wo $f(x)$ in der Umgebung von $x=a$ holomorph und $\alpha > 0$ ist, einen bestimmten Wert besitzt.*)

1. Wir wollen für das Differentialsystem (A) das folgende beweisen.

Es bedeute S denjenigen, den Punkt a enthaltenden Bereich, innerhalb dessen die Funktionen $P_{ik}(x)$ holomorph sind. Wir denken uns von a aus einen Schnitt l nach der Begrenzung von S hin gelegt, dann ist innerhalb des so zerschnittenen Bereiches S ein Integralsystem $y_1, \dots y_n$ von (A) eindeutig bestimmt. Wenn sich nun die Variable x auf einem beliebigen Wege, der innerhalb S verbleibt und den Schnitt l nicht überschreitet, dem Punkte a annähert, so streben die Funktionen $y_1, \dots y_n$ gleichmäßig wohlbestimmten endlichen oder unendlich großen Grenzwerten zu, die von dem Wege der Variabeln x unabhängig sind. Oder mit anderen Worten: Beschreibt man um a als Mittelpunkt zwei Kreise mit hinlänglich kleinen Radien ε, η, wo $\eta < \varepsilon$, so kann die Differenz der Werte, die irgend ein y_k in zwei beliebigen Punkten dieser Kreise annimmt, dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man den Radius ε des größeren Kreises hinreichend klein wählt.

2. Wir denken uns den Punkt a in den Punkt $x=0$ verlegt; dann hat also das Differentialsystem (A) die Form:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{A_{\lambda k}}{x} + \psi_{\lambda k} \right) y_\lambda,$$

wo die A_{ik} Konstanten, die ψ_{ik} in der Umgebung von $x=0$ holomorphe Funktionen bedeuten. Wir können, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß die Wurzeln der Gleichung

$$| A_{ik} - \delta_{ik} r | = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

von einander verschieden**) und in ihren realen Teilen wesentlich positiv sind. Seien $r_1, \dots r_n$ diese Wurzeln, und bedeute (γ_{ik}) eine Matrix, deren Elemente die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{i\lambda} (A_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} r_i) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

*) Ich habe diesen Beweis am 18. Dezember 1905 der ungar. Akademie der Wissenschaften mitgeteilt (Mathem. Értesitö XXIV, S. 117 ff.).

**) Ganzzahlige Differenzen sind natürlich nicht ausgeschlossen.

befriedigen. Wenn wir in unser Differentialsystem an Stelle von $y_1, \dots y_n$ die Größen $\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \gamma_{\lambda k}$ einführen, diese Größen dann wieder durch $y_1, \dots y_n$ bezeichnen und

$$(\gamma'_{ik})^{-1}(\psi_{ik})(\gamma_{ik}) = (\Phi_{ik})$$

setzen, so erhält das Differentialsystem die Form:

$$\text{(A')} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \frac{r_k}{x} y_k + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \Phi_{\lambda k}, \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

wo die Φ_{ik} in der Umgebung von $x = 0$ holomorphe Funktionen bedeuten.

3. Wir untersuchen nun zuvörderst die Lösungen des Systems (A') längs eines im Punkte $x = 0$ endenden Strahles. Setzen wir

$$(1.) \qquad x = t e^{\theta i}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

wo t real positiv ist und θ einen konstanten Winkel bedeutet, so wird

$$\text{(A'')} \qquad \frac{dy_k}{dt} = \frac{r_k}{t} y_k + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda e^{\theta i} \Phi_{\lambda k}(t e^{\theta i}).$$

In diesem linearen Differentialsystem ist die unabhängige Variable real, und die Koeffizienten sind komplexe Funktionen dieser realen Variabeln; es können folglich die in meiner Note*) entwickelten Formeln mutatis mutandis auf das System (A'') angewandt werden. Es seien

$$(2.) \qquad x_0 = t_0 e^{\theta i}, \qquad x_1 = \varepsilon e^{\theta i}$$

zwei innerhalb S befindliche Punkte unseres Strahles, $\varepsilon < t_0$, dann wollen wir dasjenige Integralsystem $y_1, \dots y_n$ von (A'') im Punkte x_1 bestimmen, dessen Anfangswerte im Punkte x_0 durch $y_1^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$ dargestellt sind. Im Sinne der erwähnten Notiz haben wir dazu den folgenden Algorithmus zu bilden:

$$(3.) \left\{ \begin{array}{c} y_k^{(\nu)} = y_k^{(\nu-1)} + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_k}{\tau_{\nu-1}} y_k^{(\nu-1)} + (t_\nu - t_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(\nu-1)} e^{\theta i} \Phi_{\lambda k}(\tau_{\nu-1} e^{\theta i}), \\ (\nu = 1, 2, \dots m), \\ t_0 > t_1 > \cdots > t_m = \varepsilon, \qquad t_{\nu-1} \geqq \tau_{\nu-1} > t_\nu. \end{array} \right.$$

Bezeichnet g die obere Grenze der absoluten Beträge der Funktionen $\Phi_{\lambda k}(x)$ innerhalb S, so folgt

*) Dieses Journal Bd. 131, S. 202 ff.

$$|y_k^{(\nu)}| < |y_k^{(\nu-1)}| \cdot \left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + |t_\nu - t_{\nu-1}|\, g \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\nu-1)}|,$$

und indem wir in bezug auf k von 1 bis n summieren,

$$(4.)\quad \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu)}| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu-1)}| \left\{\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g\right\}.$$

Es sei

$$r_k = \varrho_k + \sigma_k i,$$

dann haben wir

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| = \left\{1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\varrho_k + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (\varrho_k^2 + \sigma_k^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

also, wenn $\bar{\varrho}$ eine positive Größe bedeutet, die nicht größer ist als die $\varrho_1, \dots \varrho_n$, und r eine positive Größe, die nicht kleiner ist als die $|r_1|, \dots |r_n|$,

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| < \left\{1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\bar{\varrho} + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 r^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen für einen Augenblick

$$1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\bar{\varrho} + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 r^2 = \alpha,$$

$$(t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g = \beta,$$

dann ist

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g < \alpha^{\frac{1}{2}} + \beta$$
$$< (\alpha + \beta^2 + 2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta)^{\frac{1}{2}},$$

da aber

$$\alpha < \left(1 + \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} r\right)^2,$$

so folgt

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g < \left\{\alpha + \beta^2 + 2\beta\left(1 + \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} r\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$
$$< \left\{1 - 2\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\bar{\varrho} - n g \tau_{\nu-1}) + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (r + n g \tau_{\nu-1})^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir wählen nun den Punkt x_0 so, daß

$$\varrho = \bar{\varrho} - n g t_0 > 0,$$

dann ist, da $\tau_{\nu-1} < t_0$,

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g < \left\{1 - 2\,\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\,\varrho + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (r + n g t_0)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

also, wenn

$$(r + n g t_0)^2 - \varrho^2 = \sigma^2$$

gesetzt wird (der Ausdruck linker Hand ist positiv), so folgt endlich

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_k}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)\, n g < \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma i)\right|.$$

Die Ungleichung (4.) ergibt hiernach

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu)}| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu-1)}| \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma i)\right|,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k^{(m)}| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}| \prod_{\nu=1}^{m} \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma i)\right|$$

und, indem wir in bezug auf m zur Grenze übergehen,

$$(5.)\qquad \sum_{k=1}^{n} |y_k(x_1)| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}| \lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m} \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma i)\right|.$$

Der rechter Hand auftretende Grenzwert kann nun in äußerst einfacher Weise bestimmt werden. Betrachten wir nämlich die Differentialgleichung

$$(6.)\qquad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{\varrho + \sigma i}{t}\,\mathfrak{y},$$

so wird dasjenige Integral $\mathfrak{y}$ derselben, das sich in $t = t_0$ auf $\mathfrak{y}^{(0)} = 1$ reduziert, im Punkte $t = \varepsilon$ durch den Algorithmus

$$\mathfrak{y}^{(\nu)} = \mathfrak{y}^{(\nu-1)} + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{\varrho + \sigma i}{\tau_{\nu-1}}\,\mathfrak{y}^{(\nu-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

determiniert, so daß

$$\mathfrak{y}(\varepsilon) = \lim_{m} \mathfrak{y}^{(m)} = \lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma i)\right),$$

also

$$(7.)\qquad \left|\left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{\varrho+\sigma i}\right| = \lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m} \left| 1 - \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} (\varrho + \sigma i) \right|$$

ist. Wir finden also nach (5.)

$$(8.)\qquad \sum_{k=1}^{n} |y_k(x_1)| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}| \left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{\varrho};$$

hieraus folgt, daß die y_k, wenn x sich längs eines im Punkte $x=0$ endenden Strahles dem Punkte $x=0$ nähert, gleichmäßig der Grenze Null zustreben. Das letztere Resultat kann auch direkt, d. h. ohne die Integration der Differentialgleichung (6.) zu Hilfe zu nehmen, erhalten werden, wenn man die Teilungspunkte $t_1, \dots t_{m-1}$ und die intermediären Werte $\tau_0, \dots \tau_{m-1}$ auf spezielle Weise wählt.*) Nehmen wir nämlich gleich $\varepsilon = 0$, und teilen wir das von t_0 bis 0 reichende Integrationsintervall in m gleiche Teile, so daß

$$t_{\nu-1} - t_\nu = \frac{t_0}{m},$$

verlegen wir ferner die Zwischenwerte $\tau_{\nu-1}$ in die Anfangspunkte $t_{\nu-1}$ der Intervalle, so ist

$$\tau_{\nu-1} = t_{\nu-1} = \frac{m-\nu+1}{m} t_0, \quad \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} = \frac{-1}{m-\nu+1},$$

also

$$\lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m} \left(1 + \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} (\varrho + \sigma i)\right) = \lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m} \left(1 - \frac{\varrho + \sigma i}{m-\nu+1}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varrho + \sigma i}{\nu}\right);$$

dieses unendliche Produkt divergiert aber bekanntlich für ein positives ϱ gegen Null.

4. Es sei nunmehr $x_2 = \eta e^{\theta i}$, wo $\eta < \varepsilon$. Dann ist nach (8.):

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k(x_2)| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}| \left(\frac{\eta}{t_0}\right)^{\varrho},$$

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k(x_1)| < \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}| \left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{\varrho}$$

---

*) Durch eine solche spezielle Wahl der Teilungspunkte des Integrationsintervalls beweist mein Freund *J. Farkas* in einer 1902 in ungarischer Sprache erschienenen Schrift: „Theorie der Vektoren und der einfachen Ungleichungen", S. 55 ff. die Konvergenz der Integrale von der Form (B).

und folglich

$$\sum_{k=1}^{n} | y_k(x_2) - y_k(x_1) | < 2 \sum_{k=1}^{n} | y_k^{(0)} | \left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{\varrho};$$

für zwei auf demselben Strahle gelegene Punkte x_1, x_2 kann demnach die Differenz $y_k(x_2) - y_k(x_1)$ dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden, indem man $\varepsilon = |x_1|$ hinreichend klein wählt, und zwar unabhängig von der Richtung des Strahles und von dem Werte von $\eta = |x_2|$. Es ist jetzt nur noch erforderlich zu zeigen, daß das gleiche bestehen bleibt, wenn an die Stelle von x_1 ein Punkt $x_3 = \varepsilon e^{\theta' i}$ tritt, der nicht mit x_2 auf demselben Strahle liegt, wo also $\theta' \neq \theta$ ist. Es ist

$$| y_k(x_2) - y_k(x_3) | < | y_k(x_2) - y_k(x_1) | + | y_k(x_3) - y_k(x_1) |;$$

um die zweite Differenz rechter Hand abzuschätzen setzen wir

$$x = \varepsilon e^{\varphi i},$$

wo jetzt ε konstant, φ veränderlich ist. Das Differentialsystem (A′) wird

$$(\mathrm{A}''') \qquad \frac{d y_k}{d \varphi} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda (r_\lambda \delta_{\lambda k} + i \varepsilon e^{\varphi i} \Phi_{\lambda k}),$$

die Koeffizienten dieses Systems sind eindeutige, endliche und stetige Funktionen der realen Variabeln φ. Die Werte der Elemente des Integralsystems $y_1, \dots y_n$ für $\varphi = \theta'$, das an der Stelle $\varphi = \theta$ die Anfangswerte $y_1(x_1), \dots y_n(x_1)$ besitzt, können durch den *Cauchy-Lipschitz*schen Algorithmus bestimmt werden. Da die absoluten Beträge der Koeffizienten $r_\lambda \delta_{\lambda k} + i \varepsilon e^{\varphi i} \Phi_{\lambda k}$ eine nur von ε abhängende obere Grenze γ besitzen, ist die Ungleichung (3.) meiner Note*) hier anwendbar; wir haben also:

$$| y_k(x_3) - y_k(x_1) | < \gamma\, e^{n \gamma |\theta' - \theta|} | \theta' - \theta | \sum_{k=1}^{n} | y_k(x_1) |,$$

und da nur solche im Punkte $x = 0$ endenden Wege in Betracht kommen, die den Schnitt l nicht überschreiten, so folgt weiter:

---

*) Dieses Journal Bd. 131, S. 204.

$$| y_k(x_3) - y_k(x_1) | < \gamma\, e^{2\pi n \gamma}\, 2\pi \sum_{k=1}^{n} | y_k(x_1) |.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichung (8.) können wir demnach sagen, daß

$$| y_k(x_3) - y_k(x_1) |$$

durch Verkleinerung von ε beliebig klein gemacht werden kann, und damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Die Theorie der Zahlstrahlen.

Von Herrn *Rudolf Fueter* in Marburg.

II. Teil.*)

Dieser Teil bringt in Kap. V die für einen allgemeinen Körper gültige Theorie der Geschlechter. In Kap. VI und VII findet sich die Anwendung auf die komplexe Multiplikation: es werden da zum erstenmal die beiden Theoreme bewiesen:

I. Theorem: Die Relativdiskriminante der Gleichungen der komplexen Multiplikation in bezug auf einen Ring r mit dem Führer $\mathfrak{f}$ des quadratisch imaginären Körpers $(\sqrt{m})$ enthält nur die Primzahlen des Führers $\mathfrak{f}$.

II. Theorem: Jede in einem quadratisch imaginären Körper *Abel*sche Gleichung läßt sich durch die Körper der singulären Moduln und durch die Kreisteilungskörper lösen.

V. Kapitel. *Die Geschlechter des Klassenstrahls.*

Hauptsatz: *Ist l^h die Anzahl aller möglichen Geschlechter des Klassenstrahls eines relativ Abelschen Körpers vom Relativgrade l^r, so ist die Anzahl der existierenden Geschlechter höchstens gleich l^{h-r}.*

1. Es seien e relativ zyklische, von einander unabhängige Körper $K_1, K_2, \dots K_e$ vom Typus Kap. I gegeben. Die betreffenden zyklischen Substitutionen sollen mit $S_1, S_2, S_3, \dots S_e$, und die Relativgrade mit $l^{r_1} = n_1$,

*) Siehe dieses Journal Bd. 130 S. 197.

$l^{r_2} = n_2, \dots l^{r_e} = n_e$ bezeichnet werden (l irgend eine Primzahl). Es ist also:

$$S_i^{n_i} = 1, \quad i = 1, 2 \cdots e.$$

Alle Körper $K_1, K_2, \dots K_e$ sollen zusammen den Körper K bilden vom Relativgrade

$$l^r = n = n_1 n_2 \dots n_e = l^{r_1 + r_2 + \dots r_e}.$$

Es seien $p_1, p_2, p_3, \dots p_t$*) die sämtlichen in der Relativdiskriminante von K aufgehenden, von einander verschiedenen Primzahlen, und es werde

$$p_1 = \mathfrak{P}_1^{\nu_1}, \quad p_2 = \mathfrak{P}_2^{\nu_2}, \dots p_t = \mathfrak{P}_t^{\nu_t},$$

wo die $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_t$ die größtmöglichen Potenzen von l sind.**) Wir bilden den Kongruenzstrahl in k mit dem Führer $\mathfrak{f} = (p_1 p_2 \dots p_t)$. Ist m der größte zu l prime Teiler seiner Klassenanzahl, so erheben wir jede Strahlklasse in die m^{te} Potenz. Die so entstehenden Klassen bilden wieder eine *Abel*sche Gruppe und lassen sich in der Form darstellen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^{x_1} \mathfrak{a}_2^{x_2} \dots \mathfrak{a}_g^{x_g} \begin{cases} 0 \leqq x_i < l^{a_i}, \\ i = 1, 2, \dots g, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_g$ ein *ein für allemal festgewähltes Basensystem* ist. Die Zahl

$$l^h = l^{a_1 + a_2 + \dots + a_g}$$

nennen wir *die zu l gehörige Strahlklassenanzahl.*

Jedem Ideal einer Klasse $\mathfrak{a}$ ordnen wir das Symbol

$$(x_1, x_2, \dots x_g)$$

zu. Es gibt also l^h verschiedene Symbole. Das Symbol

$$(0, 0, 0, \dots 0)$$

entspricht der Hauptstrahlklasse und heiße *Hauptsymbol.*

2. Wir bilden mit den Primidealen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_t$***) den zugehörigen Klassenstrahl†) des Körpers K mit dem Führer $\mathfrak{F}$. Jedem seiner Ideale

---

*) Kommt unter den p die Primzahl l vor, so verstehen wir jetzt und in Zukunft stets die Potenz $\mathfrak{l}^{r_t r' + 1}$ unter einem der (p).

**) Siehe d. J. Bd. 130 S. 211 u. ff.

***) S. Anm. *); l ist wieder gesondert zu betrachten. Vergl. d. J. Bd. 130, S. 228.

†) Dieses Journal Bd. 130 S. 230 u. ff.

$\mathfrak{A}$, dessen Relativnorm in bezug auf k in $\mathfrak{a}$ fällt, ordnen wir das Symbol

$$(x_1, x_2, \dots x_g)$$

zu, wenn dem Ideal $\mathfrak{a} = N_k(\mathfrak{A})$ von k dieses Symbol entspricht.

Ideale derselben Klasse haben dasselbe Symbol. Man spricht deshalb von dem Symbol einer Strahlklasse. Alle Klassen mit demselben Symbol bilden ein *Geschlecht.* Alle Klassen mit dem Symbol $(0, 0, \dots 0)$ bilden das *Hauptgeschlecht.* Die Anzahl aller möglichen Geschlechter beträgt:

$$l^h.$$

3. Wir setzen

$$S = S_1^{\frac{n_1}{l}} \cdot S_2^{\frac{n_2}{l}} \dots S_e^{\frac{n_e}{l}},$$

dann ist

$$S^l = 1.$$

Die $(1-S)$*-te symbolische Potenz einer Klasse A des Klassenstrahls liegt im Hauptgeschlecht.*

Denn ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal von A und

$$\mathfrak{A}^{1-S} \cong \mathfrak{B} \ (\mathfrak{F})$$

so wird

$$\mathfrak{B}^{1+S+S^2+\dots+S^{l-1}} \cong 1 \ (\mathfrak{F}),$$

also um so mehr

$$\mathfrak{b} = N_k(\mathfrak{B}) \cong 1 \ (\mathfrak{f}),$$

$\mathfrak{b}$ liegt somit im Hauptstrahl und hat das Symbol $(0, 0, \dots 0)$.

4. Es sei A eine Klasse des Klassenstrahls und

$$A^{1-S} = 1$$

d. h., wenn $\mathfrak{A}$ ein Ideal von A:

$$\mathfrak{A}^{1-S} \cong 1 \ (\mathfrak{F}).$$

Dann kann

$$\mathfrak{A}^{1-S} = \mathcal{A}^{-(1-S)}$$

gesetzt werden, wo $\mathcal{A}$ eine Zahl des Strahles, und zwar deshalb, weil in S alle Substitutionen $S_i^{\frac{n_i}{l}}$ als Faktoren auftreten; $\mathcal{A}$ ist sicher prim zur Relativ-

diskriminante von K, da sonst A^{1-S} nicht im Klassenstrahl läge.*) Also wird

$$(A)\mathfrak{A} = S(A)\mathfrak{A}$$

d. h. $(A)\mathfrak{A}$ ist ein ambiges Ideal. Da wir im Klassenstrahl sind, ist $(A)\mathfrak{A}$ zu allen in der Relativdiskriminante aufgehenden Idealen prim, also kann $(A)\mathfrak{A}$ nur ein Strahlideal von k sein:

$$(A)\mathfrak{A} = \mathfrak{a}$$

oder

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{a}\ (\mathfrak{F})$$

(jede Zahl des Klassenstrahls, die in k liegt, ist auch Zahl des Strahles $\mathfrak{f}$ von k) d. h.

Jedes Ideal, dessen $(1-S)$-te symbolische Potenz Hauptstrahl wird, ist einem Strahlideal von k äquivalent.

5. Sind zwei Ideale $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gegeben, für die

$$\mathfrak{A}_1^{1-S} \simeq \mathfrak{A}_2^{1-S}\ (\mathfrak{F})$$

so muß demnach

$$\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_2\ (\mathfrak{F})$$

sein, wo $\mathfrak{a}$ ein Strahlideal von k. Nun gibt es aber im ganzen l^h Klassen $\mathfrak{a}$ in k; dieselben bilden aber nach Kap. IV (S. 232) nur

$$l^{h-r}$$

Klassen im Klassenstrahl. Somit gibt es l^{h-r} Klassen $\mathfrak{A}_2$, für die

$$\mathfrak{A}_2^{1-S} \simeq \mathfrak{A}_1^{1-S}\ (\mathfrak{F}).$$

Die Anzahl aller Klassen ist demnach

$$\leqq s \cdot l^{h-r},$$

wenn es s Klassen im Hauptgeschlecht gibt. Denn $\mathfrak{A}_1^{1-S}$ ist immer eine Klasse des Hauptgeschlechtes.

6. *In jedem Geschlecht gibt es gleich viele, nämlich s Klassen.*

Denn gibt es in einem Geschlechte eine Klasse A, so erhält man durch Multiplikation mit den s Klassen des Hauptgeschlechtes lauter verschiedene Klassen des Geschlechtes von A. Man erhält aber auch jede;

*) Dies ist eine einfache Verallgemeinerung des Satzes auf S. 235 in diesem Journal, Bd. 130.

denn der Quotient zweier Klassen desselben Geschlechtes liegt im Hauptgeschlecht.

Ist also g die Anzahl der existierenden Geschlechter, so ist die Anzahl aller Klassen:

$$= g \cdot s.$$

Vergleicht man dies mit 5., so wird:

$$g \leqq l^{h-r},$$

woraus der Satz am Kopfe des Kapitels. Das Resultat kann auch so ausgedrückt werden:

Satz: *Es gibt* $(l^h - l^{h-r})$ *zu* l *gehörige Klassen des Strahls in* k, *deren sämtliche Ideale nicht Relativnormen von Idealen des Klassenstrahls sind.*

Man kann dieses Resultat noch etwas verallgemeinern. Fügt man zu $\mathfrak{f}$ noch beliebige zu $\mathfrak{f}$ prime Primzahlen $k_1, k_2, \ldots k_n$ hinzu*), so sei l^{h^*} die größte in der Klassenanzahl des Strahles $(k_1 \cdot k_2 \ldots k_n \cdot \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}^*$ enthaltene Potenz von l. Jeder zu l gehörigen Klasse des Strahles $\mathfrak{f}$ entsprechen dann $\frac{l^{h^*}}{l^h}$ zu l gehörige Klassen im Strahl $\mathfrak{f}^*$. Somit lautet obiger Satz:

Satz: *Es gibt*

$$\frac{l^{h^*}}{l^h}\left(l^h - l^{h-r}\right) = l^{h^*} - l^{h^*-r}$$

Klassen des Strahles $\mathfrak{f}^*$, *deren Ideale nicht Relativnormen von Idealen des Klassenstrahles sind. Dabei ist* l^{h^*} *die größte in der Klassenanzahl des Strahls* $\mathfrak{f}^*$ *enthaltene Potenz von* l.

VI. Kapitel. *Anwendung auf die Gleichungen der komplexen Multiplikation.*

Hauptsatz: *Die Relativdiskriminante der Klassengleichung der komplexen Multiplikation in bezug auf den Ring mit dem Führer* $\mathfrak{f}$ *eines quadratisch imaginären Körpers enthält nur die Primzahlen des Führers* $\mathfrak{f}$.

1. Die komplexe Multiplikation gibt uns algebraische Gleichungen

$$f(x) = 0$$

mit folgenden Eigenschaften**)

) In bezug auf den Fall, daß l unter den k vorkommt, siehe Anm.) S. 256.

**) *Weber:* Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. 1891. III. Teil, insbes. 14. Abschnitt. *Fueter:* Dissert. Gött. 1903. Einleitung.

a) Zu jedem Ringe des quadratisch imaginären Körpers $k=(\sqrt{m})$ mit dem Führer $\mathfrak{f}$ gehört eine ganz bestimmte in $(\sqrt{m})$ irreduzible Gleichung

(1.) $$f(x)=0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten.

b) Der Grad der Gleichung ist gleich der Klassenanzahl h des zugehörigen Ringes $\mathfrak{f}$. Ihre Gruppe ist *Abel*sch in $(\sqrt{m})$ und holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Klassen des Ringes $\mathfrak{f}$.

c) Die Ideale von $(\sqrt{m})$ werden in $K(x, \sqrt{m})$ Hauptideale.

d) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $(\sqrt{m})$ und n der kleinste Exponent, so daß $\mathfrak{p}^n$ im Ringe $\mathfrak{f}$ liegt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $K(x, \sqrt{m})$ in $\frac{h}{n}$ von einander verschiedene Primideale. Hiervon sind ausgenommen nur eine endliche Anzahl von Primidealen $\mathfrak{p}$, über deren Verhalten man nichts weiß.

2. Wir bedürfen noch der Gleichungen der Kreisteilung, also der absolut *Abel*schen Gleichungen. Wir nehmen die f-ten Einheitswurzeln

(2.) $$x^f-1=0.$$

Die Diskriminante dieses Körpers enthält nur die Primzahlen von f, diese aber auch sämtlich. Ist p eine rationale, zu f prime Primzahl und n der kleinste Exponent, so daß

$$p^n \equiv 1\ (f),$$

so zerfällt p in $\frac{\varphi(f)}{n}$ von einander verschiedene Primideale.*) Bilden wir den Strahl mit dem Führer f,**) den wir kurz als Strahl f bezeichnen, so hat derselbe die Klassenanzahl

$$\varphi(f)$$

und wir können die Theorie der Gleichung

$$x^f-1=0$$

so zusammenfassen:

a) Die Gleichung $x^f-1=0$ definiert eine irreduzible Gleichung $f(x)=0$.

*) Siehe hierzu *Hilbert:* Zahlbericht S. 332 u. ff.

**) Siehe Nachtrag zu Teil I S. 268.

b) Ihr Grad ist die Klassenanzahl des Strahles f der ganzen rationalen Zahlen. Ihre Gruppe ist *Abel*sch und holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen im Strahl f.

c) Alle Strahlideale werden in dem durch x gegebenen Stern mit dem Führer $\mathfrak{F}$ Hauptstrahlideale.

Dieser Satz ist eine Anwendung der Sätze Kap. IV.*)

d) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Strahls f und $\mathfrak{p}^n$ die kleinste Potenz, so daß

$$\mathfrak{p}^n \equiv 1\,(f),$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ im Stern in

$$\frac{h}{n} = \frac{\varphi(f)}{n}$$

von einander verschiedene Primideale.

3. Wir wollen den Oberkörper K von $(\sqrt{m})$ untersuchen, der durch Adjunktion einer Gleichung (1.) und einer von (2.) (wo f die kleinste ganze rationale Zahl $\equiv 0\,(\mathfrak{f})$ ist,) entsteht. Dazu brauchen wir noch eine weitere Eigenschaft der Gleichung (1.)**)

Die Gleichung (1.): $f(x) = 0$ *zerfällt durch Adjunktion jeder der Größen:*

$$\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p}, \quad \begin{cases} \sqrt{-1}, & \text{falls } f \equiv 0\,(2),\ m \equiv 1\,(4), \\ \sqrt{2}, & \text{falls } m \equiv 2\,(4) \text{ oder} \\ & m \equiv 3\,(4),\ f \equiv 0\,(4), \end{cases}$$

*wo p alle von einander verschiedenen in m oder $\mathfrak{f}$ aufgehenden ungeraden Primzahlen bedeutet. Ist diese Zerfällung ausgeführt, so zerfällt dieselbe nicht durch Adjunktion irgendwelcher weiterer Einheitswurzeln.****)

Wenn also r ungerade, von einander verschiedene Primzahlen in $\mathfrak{f}$ aufgehen, h_1 der Grad der Gleichung (1.), h_2 der Grad der Gleichung (2.) (beide für denselben Führer $\mathfrak{f}$ genommen) ist, so wird der Relativgrad des Oberkörpers K beider Gleichungen in bezug auf $\sqrt{m}$ sein:

$$\frac{h_1 \cdot h_2}{2^{r+\sigma}} \quad \begin{cases} \sigma = 0, & \text{falls } f \not\equiv 0\,(4), \\ \sigma = 1, & \text{falls } f \equiv 0\,(4) \not\equiv 0\,(8), \\ \sigma = 2, & \text{falls } f \equiv 0\,(8) \end{cases}$$

---

*) Dieses Journal Bd. 130 S. 237.

**) *Weber:* a. a. O. S. 413 u. ff. *Fueter:* Diss. Kap. I.

***) *Weber:* Math. Annal. Bd. 49 S. 99.

oder, falls wir für h_1 und h_2 die Werte einsetzen und die Klassenanzahl von $(\sqrt{m})$ mit h^* bezeichnen:

$$\frac{2\,\Pi\left[p^{2a-2}(p-1)\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right)\right]}{w\cdot 2^{r+\sigma}}\cdot h^* \qquad \left\{\begin{array}{l} d = \text{Diskr. von } (\sqrt{m}) \\ \left(\frac{d}{p}\right) = +1, -1, 0, \end{array}\right.$$

wo w die Anzahl der Einheitswurzeln von $(\sqrt{m})$ bedeutet und das Produkt über alle in f aufgehenden Primzahlpotenzen p^a $(f = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots)$ zu erstrecken ist. Dieser Grad ist nichts anderes als die Strahlklassenanzahl h vom Strahl $\mathfrak{f}$ in $(\sqrt{m})$, bei Äquivalenz in weiterm Sinne.*) Ist $\Phi(\mathfrak{f})$ die Anzahl der zu $\mathfrak{f}$ primen inkongruenten Zahlen nach $\mathfrak{f}$ in $(\sqrt{m})$, so ist

$$\Phi(\mathfrak{f}) = \Pi\, p^{2a-2}(p-1)\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right).$$

Wir haben deshalb das Resultat:

In bezug auf den Strahl von $(\sqrt{m})$ mit dem Führer $\mathfrak{f}$ und der Strahlklassenanzahl h existiert ein relativ Abelscher Körper K mit dem Relativgrad h, gegeben durch eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

4. *Die Zerfällung der Primideale in K.*

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $(\sqrt{m})$ und n' der kleinste Exponent, so daß $\mathfrak{p}^{n'}$ im Ring $\mathfrak{f}$ liegt. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in (1.) in $\frac{h_1}{n'}$ Primideale. Ist ferner n'' der kleinste Exponent, so daß

$$(p)^{n''} \sim 1 \ (\mathfrak{f})$$

und n das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n'', so wird, wie leicht zu sehen, jedes der $\frac{h_1}{n'}$ Primideale durch Adjunktion von $x^f - 1 = 0$ in $\frac{h_2 \cdot n'}{2^{r+\sigma} \cdot n}$ Ideale zerfallen, also $\mathfrak{p}$ in

$$\frac{h_1 h_2}{2^{r+\sigma}\, n}$$

Primideale. Nun ist aber andererseits n der kleinste Exponent, für den

$$\mathfrak{p}^n \sim 1 \ (\mathfrak{f}).$$



*) Siehe Nachtrag zu Teil I S. 268.

Denn gäbe es ein $n' < n$, so daß

$$\mathfrak{p}^{n'} \cong 1\ (\mathfrak{f}),$$

so wäre $\mathfrak{p}^{n'}$ im Ring $\mathfrak{f}$ und

$$(p)^{n'} \cong 1\ (\mathfrak{f}).$$

n wäre also nicht das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Größen. Somit ergibt sich: *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $(\sqrt{m})$ und n der kleinste Exponent, so daß*

$$\mathfrak{p}^{n} \cong 1\ (\mathfrak{f})$$

im Strahl $\mathfrak{f}$ liegt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in $\frac{h}{n}$ von einander verschiedene Primideale. h ist die Strahlklassenanzahl. Hiervon machen Ausnahme nur eine endliche Anzahl von Primidealen.

5. Es sei l^r die größte in h enthaltene Potenz der Primzahl l; wir bilden den Unterkörper K_1 von K, der relativ *Abel*sch mit dem Relativgrad l^r in bezug auf $(\sqrt{m})$ ist. Wir erheben alle Strahlklassen von $(\sqrt{m})$ in die $\frac{h}{l^r}$ te Potenz. Die zu l gehörigen Klassen bilden das System

$$\mathfrak{a}_1^{x_1}\,\mathfrak{a}_2^{x_2}\cdots\mathfrak{a}_u^{x_u} \mid 0 \leqq x_i < l^{r_i}. \qquad (i=1,2,\ldots u)$$

Ebenso bilden wir einen neuen Strahl $\mathfrak{f}_1$ in $(\sqrt{m})$, indem wir in $\mathfrak{f}_1$ die von l verschiedenen, unter einander verschiedenen Primzahlen von $\mathfrak{f}$ aufnehmen (als einfache Faktoren), und die Primzahl l, wenn in $\mathfrak{f}$ auftretend, in ihrer richtigen Potenz. Dann geht aus dem Satze von 3. für diesen Fall gemäß der Formel über die Strahlklassenanzahl und dem Zerfällungsgesetz der Primzahlen in relativ *Abel*schen Körpern*) das Resultat hervor:

l^r ist die größte in h_1 der Klassenanzahl des Strahles $\mathfrak{f}_1$ von $(\sqrt{m})$ enthaltene Potenz von l. Ist n_1 der kleinste Exponent, so daß für ein Primideal $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p}^{\frac{h}{l^r}\cdot n_1} \cong 1\ (\mathfrak{f}_1),$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_1 in $\frac{l^r}{n_1}$ von einander verschiedene Primideale. Ausnahme machen nur eine endliche Anzahl von Primidealen.

6. **Hilfssätze:** 1. *In einer Klasse eines Strahls von $(\sqrt{m})$ gibt es unendlich viele Primideale, falls die Klasse durch Zahlen in $(\sqrt{m})$ repräsentiert wird.*

*) Zahlbericht S. 277.

2. *Die Anzahl der Primideale der Hauptklasse ist nach* 1. *unendlich groß, und es ist, wenn p_i alle Normen dieser Primideale durchläuft:*

$$\underset{s=1}{L} \frac{\sum \frac{1}{p_i^s}}{\log \frac{1}{1-s}} = \frac{1}{2h},$$

wo h die Strahlklassenanzahl ist.

3. *Wenn in zwei zu einem gegebenen Körper relativ Abelschen Körpern vom selben Relativgrade alle Primideale 1. Grades dieselben sind, abgesehen von den Primidealen $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots,$ für die*

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)}$$

konvergiert, so sind die beiden Körper identisch.

Da die Beweise zu weit von dem eigentlichen Stoffe abführen, auch im wesentlichen schon bekannt sind, so unterdrücke ich dieselben. Es sei nur bemerkt, daß der Hilfssatz 3. sich einfach durch sukzessive Anwendung von Satz 152 Zahlbericht S. 426 ergibt.*)

7. Da es nach dem Existenzsatz von 3. für jeden Führer $\mathfrak{f}_1$ einen Körper K_1 gibt, so bezeichnen wir ihn mit $K_1(\mathfrak{f}_1)$, wo $\mathfrak{f}_1$ der entsprechende Teiler von $\mathfrak{f}$ ist, der zur Primzahl l gehört. Es sei p) eine zu $\mathfrak{f}$ prime Primzahl, und $l^s = n_p$ die größte Potenz von l, für die**

$$\frac{1}{2^{r+\sigma}} (p-1)\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right) \equiv 0 \quad (l^s).$$

Dann betrachten wir $K_1(\mathfrak{f}_1 p)$. In diesem Körper wird p niemals die n^*-te Potenz eines Ideals, falls $n^* > n_p$. Denn sonst müßte nach dem Satze Kap. III.*)**

$$(p-1)\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right) \equiv 0 \quad (n^*)$$

gegen die Definition von $n_p < n^*$.†)

*) Vgl. auch hierzu *Weber*, d. J. Bd. 129. S. 35, wo im wesentlichen auch der Strahlbegriff gebraucht wird zum Beweise eines speziellen Falles von 1.

**) S. die Anm. S. 256 für den Fall $p = l$. Der Fall ist gesondert zu betrachten.

***) D. J. S. 232 und S. 228 u. ff.

†) Der Fall $l = 2$ ist gesondert zu betrachten, macht aber keine Schwierigkeit, weil wir die Diskriminante der Kreiskörper kennen. Wir brauchen nur wiederum K_1 aus (1) und (2) zusammenzusetzen.

Ist wieder h_1 der Relativgrad von $K_1(\mathfrak{f}_1)$ in bezug auf $(\sqrt{m})$, so ist

$$l^r \cdot l^s = h_2$$

der Relativgrad von $K_1(\mathfrak{f}_1 p)$ in bezug auf $(\sqrt{m})$. Nach unseren obigen Überlegungen muß also in $K_1(\mathfrak{f}_1 p)$ *ein Unterkörper l^r-ten Relativgrades existieren, dessen Relativdiskriminante zu p prim ist.* Wir bezeichnen ihn mit $K_1^*(\mathfrak{f}_1 p)$. *Derselbe ist also wieder ein relativ Abelscher Körper von $(\sqrt{m})$, mit dem Relativgrad l^r und zu p primer Relativdiskriminante.*

Wir wenden auf diesen Körper unsern Satz Kap. V an. Es sei $\mathfrak{f}^*$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mathfrak{f}_1$ und dem aus der Relativdiskriminante von $K_1^*(p\mathfrak{f}_1)$ entspringenden Führer. $\mathfrak{f}^*$ *ist somit zu p prim.* Dann gibt es im Strahl $\mathfrak{f}^*(l^{n^*} - l^{n^*-r})$ Klassen, die nicht zerfallen, wenn l^{n^*} die zu l gehörige Klassenanzahl vom Strahl $\mathfrak{f}^*$ ist. Würde unter diesen Klassen eine Klasse $\mathfrak{a}$ vorkommen, die im Strahl $\mathfrak{f}_1$ in die Hauptklasse fiele, so würde es (nach Hilfssatz 1 in 6.) unendlich viele Primideale dieser Klasse geben, welche zugleich auch im Hauptstrahl von $(p\mathfrak{f}_1)$ liegen, da ja p zu $\mathfrak{f}^*$ prim ist. Diese Primideale müssen aber alle in $K_1^*(p\mathfrak{f}_1)$ (bis auf eine endliche Anzahl) in l^r Primideale zerfallen, da $K_1^*(p\mathfrak{f}_1)$ ein Unterkörper von $K_1(p\mathfrak{f}_1)$ ist, der dem Zerlegungssatze 4. genügt. Also kann auch keine Klasse $\mathfrak{a} \sim 1\,(\mathfrak{f}_1)$ unter dem obigen System von Klassen vorkommen.

Nun gibt es aber im Strahle $\mathfrak{f}^*$ l^{n^*-r} zu l gehörige Klassen, die Hauptklassen im Strahl $\mathfrak{f}_1$ werden, also

$$l^{n^*} - l^{n^*-r}$$

zu l gehörige Klassen, die nicht Hauptklassen im Strahle $\mathfrak{f}_1$ sind. Somit müssen die sämtlichen Ideale *aller* Klassen vom Strahl $\mathfrak{f}_1$, die nicht Hauptklassen sind, nicht Relativnormen von Idealen in $K_1^*(p\mathfrak{f}_1)$ werden. Alle Primideale dieser Klassen zerfallen also nicht in Primideale 1. Grades. Wir haben das Resultat, da nur l^r Klassen vom Strahl $\mathfrak{f}_1$ zu l gehören:

Alle Primideale vom Strahl $\mathfrak{f}_1$, die nicht in der zu l gehörigen Hauptklasse sind, zerfallen in $K_1^*(p\mathfrak{f}_1)$, nicht in l^r Primideale.

Durchläuft p_i alle Primzahlen, die Normen eines Primideals der Hauptklasse von $\mathfrak{f}_1$ sind, so ist nach Hilfssatz 2.:

$$\underset{s=1}{L}\,\frac{\Sigma\frac{1}{p_i^s}}{\log\frac{1}{1-s}}=\frac{1}{2\,l^r}.$$

Durchläuft aber p_i' alle Primideale 1. Grades, so ist,*) da $2\,l^r$ der Grad des *Galois*schen Körpers $K_1^*\,(p\,\mathfrak{f}_1)$ ist,

$$\underset{s=1}{L}\,\frac{\Sigma\frac{1}{p_i'^s}}{\log\frac{1}{1-s}}=\frac{1}{2\,l^r}.$$

Da aber alle p_i' nach obigem unter den p_i enthalten sind, so erhält man den

Satz: *Alle Primideale der Hauptklasse von* $\mathfrak{f}_1$ *zerfallen in* $K_1^*\,(p\,\mathfrak{f}_1)$ *in* l^r *Primideale, abgesehen von den Primidealen* $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \mathfrak{p}_3^*, \ldots$, *für die*

$$\Sigma\frac{1}{n\,(\mathfrak{p}_i^*)}$$

konvergiert.

Dann muß aber $K_1^*\,(p\,\mathfrak{f}_1)$ mit $K_1\,(\mathfrak{f}_1)$ identisch sein nach Hilfssatz 3. in 6., und da $K_1^*\,(p\,\mathfrak{f}_1)$ eine zu p prime Relativdiskriminante hat, muß auch $K_1\,(\mathfrak{f}_1)$ eine zu p prime Relativdiskriminante haben. Somit kann unter den endlich vielen Primzahlen der Relativdiskriminante von $K_1\,(\mathfrak{f}_1)$ keine zu $\mathfrak{f}_1$ prime Primzahl p auftreten. (Schließlich könnte man hier noch leicht beweisen, daß auch p wirklich die l^r-te Potenz eines Ideals in $K_1\,(p\,\mathfrak{f}_1)$ wird.)

Da wir diesen Beweis für jede Primzahl l machen können, haben wir den Satz bewiesen:

Satz: *Die Gleichungen der komplexen Multiplikation haben eine Relativdiskriminante, die nur die Primzahlen des zugehörigen Ringes enthält.***)

Andererseits kennen wir jetzt auch die Existenz des *Sternes* ✻$(\mathfrak{f})$:

Satz: *Zu jedem Strahl mit dem Führer* $\mathfrak{f}$ *in* $(\sqrt{m})$ *existiert ein zugehöriger* ✻$(\mathfrak{f})$, *dessen Relativgrad gleich der Klassenanzahl des Strahles* $\mathfrak{f}$,

*) Zahlbericht. S. 265. Satz 84.

**) Die Gleichungen der Klasseninvarianten zweiter Art sind bis jetzt nicht besonders hervorgehoben worden. Sie entsprechen Ringen mit durch 2 teilbarem Führer. Siehe *Weber*, Ellipt. Funkt. etc. S. 339.

dessen Gruppe holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen ist, und dessen Relativdiskriminante nur die Primzahlen des Führers $\mathfrak{f}$ *enthält.*

VII. Kapitel.

Die Abelschen Gleichungen in einem quadratisch imaginären Körper.

Hauptsatz: *Jede in einem quadratisch imaginären Körper Abelsche Gleichung läßt sich durch die Körper der singulären Moduln und durch die Kreiskörper lösen.*

1. Gegeben eine Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Ihre Koeffizienten seien Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers $(\sqrt{m})$, und ihre Gruppe sei in diesem Körper *Abel*sch. Dann führen wir $f(x) = 0$ auf ein System von Gleichungen gemäß Kap. I:*)

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \ldots$$

zurück, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind und die in $(\sqrt{m})$ eine *Abel*sche Gruppe haben.

2. Wir beweisen für jede Gleichung des Systems in 1. den Satz gesondert; z. B. für $f_1(x) = 0$. Wir bilden den aus seiner Relativdiskriminante entspringenden Führer $\mathfrak{F}$ in $(x, \sqrt{m})$, $\mathfrak{f}$ in $(\sqrt{m})$. Dann existiert nach Kap. VI. ein Stern $*(\mathfrak{f},)$ dessen Gleichung durch die Kreiskörper und Körper der singulären Moduln geliefert wird. Wäre nun $f_1(x) = 0$ nicht Unterkörper von $*(\mathfrak{f})$, so gäbe es einen zum Strahl $\mathfrak{f}$ relativ *Abel*schen Körper von einem Relativgrade größer als die Klassenanzahl des Strahles. Das ist wegen des Satzes Kap. IV.**) unmöglich. Also muß $f_1(x)$ Unterkörper von $*(\mathfrak{f})$ sein, womit unser Hauptsatz bewiesen ist.

Zum Schlusse sei noch eine Bemerkung angefügt. Alle hier verwendeten Methoden sind *rein arithmetisch*. Mit denselben ist aber auch kein Existenzbeweis zu führen. Erst die Anwendung auf die komplexe

*) Dieses Journal Bd. 130. S. 207.

**) Dieses Journal Bd. 130. S. 237.

Multiplikation brachte das transzendente Element. Die Funktionentheorie liefert den Existenzbeweis. Es ist somit das zu Beginn Gesagte bestätigt.

Wie angedeutet, liegen in dem Satz Kap. V. die Reziprozitätsgesetze versteckt. Sie sind einfach herauszuschälen, d. h. auf die bisherige Form zu bringen durch Adjunktion von Einheitswurzeln. Allein mir scheint der Satz über die Geschlechter gerade der allgemeine Ausdruck derselben zu sein, falls man von weiterer Adjunktion von Einheitswurzeln absieht.

Nachtrag zu Teil I.

In der Definition des Äquivalenzbegriffes ist die Unterscheidung von Äquivalenz im engeren und weiteren Sinne nicht auseinandergehalten, trotzdem dies ein springender Punkt ist.

Ist der Körper k reell, so nennen wir nur dann zwei Ideale äquivalent, wenn ihr Quotient $\equiv 1\,(\mathfrak{f})$ und positiv ist. Dies gibt für den Körper (1.) die Strahlklassenanzahl

$$\varphi(f)$$

und nicht, wie nach der Formel $\frac{\varphi(f)}{2}$, da jetzt eine Zahl $a > 0$, für die

$$-a \equiv 1\,(f)$$

nicht mehr Hauptideal ist. Für diesen Äquivalenzbegriff gelten die sämtlichen über den Strahl festgelegten Sätze.

Für imaginäre Körper fällt diese Bedingung weg. Wir brauchen hier dagegen den *Äquivalenzbegriff im weiteren Sinne.* Wir werden zwei Strahlideale dann und nur dann äquivalent nennen, wenn ihr Quotient für jede in $\mathfrak{f}$ aufgehende Primzahlpotenz $\equiv 1\,(\mathfrak{f})$ gemacht werden kann.

Für den quadratisch imaginären Körper $(\sqrt{m})$ mit der Klassenanzahl h lautet dann der Wert der Strahlklassenanzahl h_1 des Führers $\mathfrak{f}$:

$$h_1 = \frac{\Phi(\mathfrak{f}) \cdot 2}{e \cdot w} \cdot h,$$

wo e die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz

$$x^2 \equiv 1\,(\mathfrak{f})$$

und w die Anzahl der Einheitswurzeln in $(\sqrt{m})$ ist. Denn zwei Klassen sind jetzt äquivalent, wenn das Quadrat des Quotienten $\equiv 1\,(\mathfrak{f})$ ist. Die Anzahl e ist aber*)

$$e = 2^{r+\sigma},$$

wo r die Anzahl der von einander verschiedenen ungeraden in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primzahlen, $\sigma = 0$ für $f \not\equiv 0\,(4)$, $\sigma = 1$ für $f \equiv 0\,(4) \not\equiv 0\,(8)$, $\sigma = 2$ für $f \equiv 0\,(8)$ ist. Also

$$h_1 = \frac{\Phi(\mathfrak{f}) \cdot 2}{2^{r+\sigma} \cdot w} \cdot h,$$

$\Phi(\mathfrak{f})$ die Anzahl der zu $\mathfrak{f}$ primen inkongruenten Zahlen in $(\sqrt{m})$. Für diesen Äquivalenzbegriff gelten die Sätze des Teiles I. Denn bei den Beweisen ist stets nur von einem in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideal Gebrauch gemacht. Für den Führer $\mathfrak{f} = p$ stimmen aber der gewöhnliche und der neue Äquivalenzbegriff überein.

Man kann für den Körper $(\sqrt{m})$ den Äquivalenzbegriff auch so festlegen. *Der Quotient zweier äquivalenter Ideale muß im Ring* $\mathfrak{f}$, *ihre Norm im Strahl* $\mathfrak{f}$ *liegen.*

*) *Dirichlet-Dedekind*, S. 87 u. ff.

Zur Theorie der trigonometrischen Reihe.

Von Herrn *Felix Bernstein* in Halle.

In der Theorie der divergenten Reihen einer komplexen Veränderlichen sind drei Methoden üblich. Die erste beruht auf einer einfachen oder wiederholten Bildung der arithmetischen Mittel der Partialsummen, wobei noch die Glieder mit geeigneten Gewichten versehen werden können. Die zweite beruht auf den Konvergenzeigenschaften der kontinuierlichen Kettenbrüche. Die dritte und umfassendste ist auf die Anwendung der nach Reihen von Polynomen fortschreitenden Entwicklung gegründet und erlaubt die allgemeine Lösung des Problems, wie *Mittag-Leffler* gezeigt hat.

Herr *Féjer* hat die erste dieser Methoden, die einfache Summation mit Erfolg auf die Untersuchung der trigonometrischen Reihen übertragen.

Im folgenden wird die dritte Methode zur Anwendung kommen, und es werden sich mit Hilfe derselben weitgehende Verallgemeinerungen ergeben. Die Basis der dritten Methode bildet die Theorie der *Approximation* durch endliche Reihen.

Bekanntlich hat *Weierstraß* bewiesen, daß sich jede stetige Funktion im Intervall von 0 bis 2π durch eine endliche trigonometrische Reihe mit vorgegebener Genauigkeit approximieren läßt.

Ferner hat *Tschebyscheff* die Bemerkung gemacht, daß die Reihen nach Orthogonalfunktionen sämtlich im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate die beste Annäherung bewirken.

Das erste dieser Theoreme, welches *Volterra* sehr einfach bewiesen hat, gestattet eine wesentliche Ausdehnung, und wir erhalten mittelst dieser eine Darstellung einer nur an den Stetigkeitsstellen gewissen Beschränkungen

der Schwankung unterworfenen Funktion an den Stetigkeitsstellen durch eine konvergente Reihe endlicher trigonometrischer Ausdrücke (Analogon des Hauptsatzes von *Féjer*).

Zweitens erhalten wir aus dem verallgemeinerten Satze von *Weierstraß* das für die Annäherung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate fundamentale Resultat, daß mittels der endlichen *Fourier*schen Reihe stets das Integral des Fehlerquadrats unter eine vorgegebene Grenze herabgedrückt werden kann. Hieraus folgt sofort ein von *de la Vallé-Poussin* und *Hurwitz**) bewiesener Satz über die *Fourier*schen Konstanten. Alle Betrachtungen beruhen ausschließlich auf dem klassischen Resultat von *Dirichlet*, welches wir nur für eine stetige aus einer endlichen Zahl linearer Stücke bestehende Funktion anwenden.

Infolge dessen gestatten die bewiesenen Sätze Verallgemeinerungen auf höhere Reihenentwicklungen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.

§ 1.

Erster Approximationssatz:

Es sei $f(x)$ eine eindeutige endliche Funktion der Periode 2π, welche in jedem Intervalle einer endlichen Menge l_n von Intervallen, die in den Grenzen 0 bis 2π gegeben seien, eine Schwankung erleidet, die kleiner als ω ist, dann kann eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angegeben werden, daß innerhalb der Menge l_n gleichmäßig für alle x

$$\text{(I)} \qquad |f(x) - \varphi_m(x)| < \omega + \varepsilon$$

ist, wo ε eine beliebig kleine vorgegebene Größe bedeutet.

Zusatz. Ist M die obere Grenze der absoluten Werte von $f(x)$ in l_n, so ist $\varphi_m(x)$ zugleich so zu bestimmen, daß für alle x

$$\text{(a)} \qquad |\varphi_m(x)| \leqq M + \varepsilon$$

wird.

In dieser Form reicht der Satz aus, um die auf die Integration im *Riemann*schen Sinne bezüglichen Sätze des § 4 zu beweisen.

*) S. Math. Ann. Bd. 57. Literaturangaben in Math. Ann. Bd. 59, S. 553 über Beweise von *E. Fischer*, *Stekloff*, *Lebesgue*. Von den verschiedenen Beweisen ist der gegenwärtige, der der allgemeinste ist, dem zweiten Beweise von *A. Hurwitz* am nächsten verwandt.

Beweis: Es sei $(a\,b)$ eins der genannten Intervalle der Menge l_n; wir haben für ein x in diesem Intervalle

$$f(x)-f(a)=\eta, \quad |\eta|<\omega,$$
$$f(x)-f(b)=\eta', \quad |\eta'|<\omega.$$

Der lineare Ausdruck

$$F(x)=f(a)+(x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ist enthalten zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und infolge dessen ist $F(x)-f(x)$ enthalten zwischen $f(a)-f(x)$ und $f(b)-f(x)$. Also ist

$$|\,F(x)-f(x)\,|<\omega \qquad (x \text{ in } (a\,b)).$$

Die Menge der linearen Ausdrücke $F(x)$ verbinden wir zu einer stetigen periodischen Funktion $f_1(x)$, indem wir in den noch fehlenden Intervallen L_n des Bereiches 0 bis 2π die Funktion $f_1(x)$ gleichfalls linear interpolieren und ihr die Periode 2π geben. Es stellt $f_1(x)$ die Funktion $f(x)$ mit einer Genauigkeit größer als ω dar. Andrerseits hat $f_1(x)$ eine begrenzte Zahl von Maxima und Minima, da l_n und L_n eine endliche Menge ist, infolge dessen können wir nach dem Theorem von *Dirichlet* $f_1(x)$ durch eine *gleichmäßig* konvergente Reihe darstellen, d. h. wir können eine endliche trigonometrische Reihe von m Gliedern $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$|\,f_1(x)-\varphi_m(x)\,|<\varepsilon$$

ist, wo ε eine beliebig vorgegebene Größe ist. Wir haben also eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$, für die

$$|\,f(x)-\varphi_m(x)\,|<\omega+\varepsilon$$

ist, womit der Satz bewiesen ist. Man sieht überdies, daß in der Tat stets

$$|\,f_1(x)\,|\leqq M$$

ist. Infolge dessen ist auch

$$|\,\varphi_m(x)\,|\leqq M+\varepsilon.$$

§ 2.

Zum Zweck der Darstellung der Funktion brauchen wir den folgenden Satz:

Verallgemeinerter erster Approximationssatz. Es seien

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$$

eine endliche Anzahl sich nicht überdeckender Intervalle, sämtlich zwischen 0 und 2π liegend, und es seien in diesen Intervallen (mit Einschluß der Grenzen) irgendwie solche endlichen Funktionswerte $f(x)$ gegeben, daß die dem Intervall δ entsprechende Schwankung ω_δ endlich ist. Es läßt sich dann stets die trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$\text{(I*)} \qquad | f(x) - \varphi_m(x) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (x \text{ in } \delta)$$

ist, wo ε eine gleichmäßig für alle δ vorgegebene Größe bedeutet.

Die Funktionswerte brauchen nicht in allen Punkten des δ zu existieren, wir müssen sie nur immer so vervollständigen können, daß sie für alle Punkte existieren, ohne daß die Schwankung sich vergrößert. *Hierzu ist offenbar nötig anzunehmen, daß an jedem gemeinsamen Grenzpunkt a zweier Intervalle δ ein Wert $f(a)$ angegeben werden kann, welcher die Schwankung in keinem der beiden Intervalle vergrößert. Wir machen diese Voraussetzung.*

Beweis: Wir ersetzen wiederum in *jedem* δ die vervollständigte Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $F(x)$, welche mit $f(x)$ an den Intervallendpunkten übereinstimmt und bilden die stückweise lineare Funktion $f_1(x)$, indem wir in den noch fehlenden Intervallen linear interpolieren. Infolge unserer Voraussetzung ist $f_1(x)$ überall stetig, und es ist

$$| f(x) - f_1(x) | < \omega_\delta \qquad (x \text{ in } \delta).$$

Wenn wir jetzt $\varphi_m(x)$ so bestimmen, daß

$$| f_1(x) - \varphi_m(x) | < \varepsilon$$

für jedes x wird, so haben wir

$$| f(x) - \varphi_m(x) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (x \text{ in } \delta),$$

q. e. d.

§ 3.

Darstellungssatz. Es sei $f(x)$ eine Funktion im Intervalle von 0 bis 2π, welche Stetigkeitsstellen besitzt und deren Werte an diesen Stellen im ganzen Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ die endliche Schwankung Ω erleiden. Dann läßt sich eine Reihe, bestehend aus endlichen trigonometrischen Ausdrücken,

angeben, welche an jeder Stetigkeitsstelle von $f(x)$ konvergiert und dort $f(x)$ darstellt.

Beweis: Wir teilen das Intervall $(0 \dots 2\pi)$ in n *gleiche* Teile)

$$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n,$$

und es sei ω_δ die jedenfalls endliche Schwankung der Werte an den Stetigkeitsstellen $\bar{x}$ in δ. Es gibt dann eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi^{(n)}(x)$, wie der verallgemeinerte Approximationssatz zeigt, so daß

$$| f(\bar{x}) - \varphi^{(n)}(\bar{x}) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (\bar{x} \text{ in } \delta)$$

ist, wo $\varepsilon = \varepsilon_n$ für jedes n beliebig vorgegeben sein kann. Wir wählen $\varepsilon_n^! > \varepsilon_{n-1}$ und $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Für jede Stetigkeitsstelle $\bar{x}$ läßt sich N so groß wählen, daß die Schwankung ω_δ für alle $n \geqq N$ unterhalb einer vorgegebenen Größe ω liegt. Es läßt sich daher ein n_1 bestimmen, von welchem ab, bei vorgegebenem ω und ε für alle $n \geqq n_1$

$$| f(\bar{x}) - \varphi^{(n)}(\bar{x}) | < \omega + \varepsilon$$

ist. Infolge dessen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \psi_{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n-1)}(x) \right)$$

an jeder Stetigkeitsstelle und stellt dort die gegebene Funktion dar.

§ 4.

Es sei jetzt $f(x)$ eine im Sinne *Riemanns* integrierbare Funktion der Periode 2π. Es sei also, unter M_1 und M_2 zwei endliche Zahlen verstanden,

1. $$M_1 \leqq f(x) \leqq M_2,$$

und es sei

2. bei vorgegebenen ω und η stets eine solche Teilung des Intervalles $(0 \dots 2\pi)$ in Intervalle

$$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$$

möglich, daß die Summe der Menge L_n derjenigen, in denen die Schwankung von $f(x)$ größer als ω ist, kleiner als η ausfällt. Es sei mit l_n die Menge der Intervalle bezeichnet, in denen die Schwankung kleiner als ω ausfällt.

Nach dem ersten Approximationssatz läßt sich die endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$| f(x) - \varphi_m(x) | < \omega + \varepsilon \qquad (x \text{ in } l_n)$$

ist, unter ε eine vorgegebene Größe verstanden, und daß außerdem für alle x

$$| \varphi_m(x) | \leqq M + \varepsilon$$

ist, wo M die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(x)$ bedeutet. Mit $f(x)$ zugleich ist im Sinne *Riemanns* auch $(f(x))^2$ und $(f(x) - \varphi_m(x))^2$ integrierbar. Wir bilden

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \varphi_m(x))^2 \, dx$$

und zerteilen dasselbe in zwei Integrale, von denen das eine über die Punkte von l_n, das andere über die Punkte von L_n erstreckt wird. Für das erstere gilt die Ungleichung

$$\int_{l_n} (f(x) - \varphi_m(x))^2 \, dx < (\omega + \varepsilon)^2 \, l_n.$$

Für das zweite gilt, indem wir berücksichtigen, daß

$$| f(x) | \leqq M$$

und also

$$| f(x) - \varphi_m(x) | \leqq 2M + \varepsilon$$

ist,

$$\int_{(L_n)} (f(x) - \varphi_m(x))^2 \, dx \leqq (2M + \varepsilon)^2 \, L_n.$$

Mithin ist

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \varphi_m(x))^2 \, dx \leqq (\omega + \varepsilon)^2 \, l_n + (2M + \varepsilon)^2 \, L_n.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung können sowohl L_n als $\omega + \varepsilon$ kleiner als vorgegebene Größen angenommen werden. Es kann also der Wert des Integrals beliebig klein gemacht werden.

Es bedeute jetzt andrerseits $\psi_m(x)$ die *Fourier*sche Entwicklung von m Gliedern, deren Koeffizienten infolge des Umstandes, daß $f(x)$ integrierbar ist, sämtlich existieren. Dann ist nach dem fundamentalen Theorem von *Tschebyscheff* für jedes m

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \psi_m(x))^2 \, dx < \int_0^{2\pi} (f(x) - \varphi_m(x))^2 \, dx.$$

Infolge dessen kann, unter η eine beliebig vorgegebene Größe verstanden, m so gewählt werden, daß für alle x

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \psi_m(x))^2 \, dx < \eta$$

ist. Diese Ungleichung gilt, da aus dem Theorem von *Tschebyscheff* folgt, daß das Integral des Rest quadratsständig abnimmt, auch für alle größeren m. Wir formulieren den Satz:

Zweiter Approximationssatz. Ist $f(x)$ eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion im Intervall $(0 \ldots 2\pi)$, so läßt sie sich nach der Methode der kleinsten Quadrate derart durch die endliche Fouriersche Reihe $\psi_m(x)$ approximieren, daß das Restintegral

$$\text{(II)} \qquad \int_0^{2\pi} (f(x) - \psi_m(x))^2 \, dx < \eta \qquad (m \geqq M)$$

für alle x bei beliebig vorgegebenen η wird.

Die Existenz der *Fourier*schen Konstanten erweist sich daher als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Annäherung einer Funktion mittels der Methode der kleinsten Quadrate, und es findet diese selbst dann statt, wenn die zugehörige *Fourier*sche Reihe divergent sein sollte. *Harnack* (Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung der willkürlichen Funktionen. Math. Ann. 17, S. 12) hat diese letztere Eventualität nicht erkannt, indem er fälschlich annimmt, daß $\lim\limits_{m=\infty} \psi_m(x)$ nur für eine Wertmenge divergieren kann, welche den Inhalt Null besitzt. Dies gilt jedoch nur für diejenigen Stellen, wo $\psi_m(x)$ *gleichmäßig* über jede gegebene Grenze wächst, während sich allgemein nichts aussagen läßt.

Es existiert daher die von ihm eingeführte durch die *Fourier*sche Reihe definierte Funktion möglicherweise nicht, und seine Resultate sind nur unter Voraussetzung der Konvergenz der *Fourier*schen Reihe bewiesen.

Wir erhalten aus unserem zweiten Approximationssatz sofort den von *Hurwitz* und *de la Vallé-Poussin* bewiesenen *Satz*. Es ist

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + a_k'^2).$$

In der Tat brauchen wir nur

$$\psi_m(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{k=m} (a_k \cos kx + a_k' \sin kx)$$

zu setzen und das Restintegral gliedweise zu integrieren, wodurch wir dasselbe in der Form

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - \pi \left[\tfrac{1}{2} a_0{}^2 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k^2 + a_k'^2)\right]$$

erhalten, und dann zur Grenze überzugehen. Hieraus folgt, wie bekannt, für zwei beliebige integrierbare Funktionen das Fundamentaltheorem der *Fourier*schen Konstanten

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a_k' b_k'),$$

wenn die Größen b_k die *Fourier*schen Konstanten von $g(x)$ bedeuten. (Siehe *Hurwitz* a. a. O.)

§ 5.

Alle diese Resultate benutzen *nur* die folgenden Eigenschaften der trigonometrischen Reihe:

1. sie ist eine Entwicklung nach Orthogonalfunktionen;
2. es läßt sich eine aus einer endlichen Anzahl linearer Stücke bestehende stetige Funktion $f_1(x)$ im Fundamentalintervall $(0 \dots 2\pi)$ gleichmäßig durch die Reihe approximieren.

Diese beiden Eigenschaften sind noch von einer großen Zahl anderer Reihen z. B. den sogenannten *Sturm-Liouville*schen Reihen sichergestellt (vgl. die zusammenfassende Arbeit von *Kneser*, Math. Ann., Bd. 58 u. 60). Wir formulieren die beiden wichtigsten Sätze:

Darstellungssatz: Bedeutet

$$V_1, V_2, \dots V_n, \dots$$

eine Reihe von Orthogonalfunktionen, mit deren Hilfe in einem Intervall $(a \dots b)$ *die Funktion* $f_1(x)$ *durch eine gleichmäßig konvergente Reihe dargestellt werden kann, so läßt sich jede Funktion* $f(x)$, *welche an den Stetigkeitsstellen im Intervall die endliche Gesamtschwankung* Ω *besitzt, durch eine nach endlichen linearen Verbindungen der* $V_1, V_2, \dots$ *fortschreitende konvergente Reihe an allen Stetigkeitsstellen im Intervall* $(a \dots b)$ *darstellen.*

Zweiter Approximationssatz. Ist $f(x)$ eine im Sinne Riemanns integrierbare Funktion im Intervall $(a \dots b)$, so läßt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine endliche Reihe $A_1 V_1 + \cdots + A_m V_m = \psi_m(x)$ so approxmieren, daß das Quadrat des Restintegrals

$$\int_a^b (f(x) - \psi_m(x))^2 g(x)\,dx < \eta \qquad (m > M)$$

für alle x bei beliebig vorgegebenen η wird. $g(x)$ bedeutet dabei in bekannter Weise das Gewicht, welches zu der Reihe der V gehört.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß auch für einen Teil der Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen, die aus einer linearen Integralgleichung entspringen, die hier erforderliche Eigenschaft 2. bewiesen ist. Wendet man den Entwicklungssatz von *Hilbert* (Gött. Nachr. 1904, S. 75) und *E. Schmidt* (Diss. Gött. § 9) an, so ist die Darstellbarkeit von $f_1(x)$ in der Form

$$f_1(x) = \int_0^1 k(s, t)\, p(t)\, dt$$

die hier über den Kern $k(s, t)$ zu machende Voraussetzung. Diese ist für eine große Anzahl Kerne als erfüllbar erkannt (s. Enzyklopädie der Math. Wiss. *Pincherle* II, A 11. Funktionaloperationen und -Gleichungen 29).

Halle a. d. S., Juli 1906.

Zur Geometrie auf der Kugel.

Von Herrn *R. Heger* in Dresden.

1. Ist $\sin\alpha : \sin\beta = m : n$, so gelten die Formeln

$$\sin^2\alpha = \frac{m^2 \sin^2(\alpha+\beta)}{m^2+n^2+2mn\cos(\alpha+\beta)}, \quad \cos^2\alpha = \frac{[n+m\cos(\alpha+\beta)]^2}{m^2+n^2+2mn\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{n+m\cos(\alpha+\beta)}.$$

Der Koordinatenbestimmung auf der Kugel legen wir ein beliebiges Kugeldreieck $A_1 A_2 A_3$ zugrunde und nehmen als Punktkoordinaten die Sinus x_1, x_2, x_3 der sphärischen Abstände $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ des Punktes von den Seiten des Achsendreiecks. Sind $\mathfrak{a}_{12}$ und $\mathfrak{a}_{13}$ die Teile des Winkels A_1, die $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$ gegenüberliegen, und bezeichnet man mit a_{12}, a_{13} deren Sinus, mit a'_{12}, a'_{13} die Kosinus, mit a''_{12}, a''_{13} die Tangenten, so hat man

$$(1.)\quad \begin{aligned} a_{12}^2 &= \frac{a_1^2 x_2^2}{x_2^2+x_3^2+2a'_1 x_2 x_3}, & a'^2_{12} &= \frac{(x_3+a'_1 x_2)^2}{x_2^2+x_3^2+2a'_1 x_2 x_3}, & a''_{12} &= \frac{a_1 x_2}{x_3+a'_1 x_2}, \\ a_{13}^2 &= \frac{a_1^2 x_3^2}{x_2^2+x_3^2+2a'_1 x_2 x_3}, & a'_{13} &= \frac{(x_2+a'_1 x_3)^2}{x_2^2+x_3^2+2a'_1 x_2 x_3}, & a''_{13} &= \frac{a_1 x_3}{x_2+a'_1 x_3} \end{aligned}$$

usf.

2. Bezeichnet man die Füße der Koordinaten von P mit P', P'', P''', so ist nach (1.)

$$(2.)\quad \begin{gathered} \frac{\sin A_2 P'}{\sin P' A_3} = \frac{a''_{31}}{a''_{21}} = \frac{a_3(x_3+a'_2 x_1)}{a_2(x_2+a'_3 x_1)}, \quad \frac{\sin A_3 P''}{\sin P'' A_1} = \frac{a''_{12}}{a''_{32}} = \frac{a_1(x_1+a'_3 x_2)}{a_3(x_3+a'_1 x_2)}, \\ \frac{\sin A_1 P'''}{\sin P''' A_2} = \frac{a''_{23}}{a''_{13}} = \frac{a_2(x_2+a'_1 x_3)}{a_1(x_1+a'_2 x_3)}. \end{gathered}$$

Mit Hilfe des *Carnot*schen Satzes ergibt sich hieraus als *Gleichung des Ortes der Punkte, deren Koordinatenfüße auf einem Hauptkreise liegen,*

$$(x_3 + a_2' x_1)(x_1 + a_3' x_2)(x_2 + a_1' x_3) + (x_2 + a_3' x_1)(x_3 + a_1' x_2)(x_1 + a_2' x_3) = 0,$$

oder

$$2(a_1' a_2' a_3' + 1) x_1 x_2 x_3 + (a_1' + a_2' a_3')(x_2^2 + x_3^2) x_1 + (a_2' + a_3' a_1')(x_3^2 + x_1^2) x_2$$
$$+ (a_3' + a_1' a_2')(x_1^2 + x_2^2) x_3 = 0.$$

$H_{ik} \equiv x_i + a_i' x_k = 0$ ist die Gleichung des Hauptkreises, der $A_i A_l$ in A_i rechtwinklig schneidet; die Ortsgleichung kann man daher ersetzen durch

$$(3.) \qquad H_{21} \cdot H_{32} \cdot H_{13} + H_{31} \cdot H_{12} \cdot H_{23} = 0.$$

Der Ort ist dem Achsendreieck umschrieben, enthält die drei Schnittpunkte $H_{ik} = H_{ki} = 0$, sowie die Ecken des Polarendreiecks von $A_1 A_2 A_3$, $H_{il} = H_{kl} = 0$.

Für den *Ort der Punkte, deren Koordinatenfüße von den Gegenecken des Achsendreiecks durch Hauptkreise eines Punktes aufgenommen werden*, ergibt sich aus (2.) die Gleichung

$$(4.) \qquad H_{21} \cdot H_{32} \cdot H_{13} - H_{31} \cdot H_{12} \cdot H_{23} = 0.$$

Die beiden Ortskurven sind besondere Glieder des Büschels kubischer Kugelkurven

$$(5.) \qquad H_{21} \cdot H_{32} \cdot H_{13} - m\, H_{31} \cdot H_{12} \cdot H_{23} = 0.$$

Die Kurve (5.) *ist der Ort der Punkte, deren Koordinatenfüße die Seiten des Achsendreiecks in Sinusverhältnissen teilen, deren Produkt m ist.*

Je zwei Kurven dieser Büschel, deren Parameter m und m' reziprok sind, haben die Eigenschaft, daß die Koordinatenfüße irgend eines Punktes P der einen Kurve mit den Koordinatenfüßen jedes Punktes Π der andern zusammen auf einem Kegelschnitte liegen; denn es ist

$$\frac{\sin A_2 P'}{\sin P' A_3} \cdot \frac{\sin A_3 P''}{\sin P'' A_1} \cdot \frac{\sin A_1 P'''}{\sin P''' A_2} = m,$$
$$\frac{\sin A_2 \Pi'}{\sin \Pi' A_3} \cdot \frac{\sin A_3 \Pi''}{\sin \Pi'' A_1} \cdot \frac{\sin A_1 \Pi'''}{\sin \Pi''' A_2} = \frac{1}{m},$$

also

$$\frac{\sin A_2 P'}{\sin P' A_3} \cdot \frac{\sin A_2 \Pi'}{\sin \Pi' A_3} \cdot \frac{\sin A_3 P''}{\sin P'' A_1} \cdot \frac{\sin A_3 \Pi''}{\sin \Pi'' A_1} \cdot \frac{\sin A_1 P'''}{\sin P''' A_2} \cdot \frac{\sin A_1 \Pi'''}{\sin \Pi''' A_2} = 1.$$

3. Als *Hauptkreiskoordinaten* u_1, u_2, u_3 kann man die Koordinaten des Hauptkreispoles für das Polardreieck ansehen. Werden die Seiten des Achsendreiecks mit $\mathfrak{l}_i$, deren Sinus, Kosinus und Tangenten mit l_i, l_i', l_i'' bezeichnet und ist

$$\mathfrak{H}_{ik} \equiv u_l - l_i' u_k,$$

so ist

$$\mathfrak{H}_{31}\,\mathfrak{H}_{12}\,\mathfrak{H}_{23} + \mathfrak{H}_{13} \cdot \mathfrak{H}_{21} \cdot \mathfrak{H}_{32} = 0$$

der Ort der Hauptkreise, deren Spuren auf den Achsen von den Polen der Achsen aus durch Hauptkreise eines Punktes aufgenommen werden.

Ferner ist

$$\mathfrak{H}_{31}\,\mathfrak{H}_{12}\,\mathfrak{H}_{23} - \mathfrak{H}_{13} \cdot \mathfrak{H}_{21} \cdot \mathfrak{H}_{32} = 0$$

der Ort der Hauptkreise, deren Spuren auf den Seiten des Achsendreiecks von den Polen aus auf die Seiten des Polarendreiecks durch Punkte eines Hauptkreises abgebildet werden; im allgemeinen ist

$$\mathfrak{H}_{31} \cdot \mathfrak{H}_{12} \cdot \mathfrak{H}_{23} - m\,\mathfrak{H}_{13} \cdot \mathfrak{H}_{21} \cdot \mathfrak{H}_{32} = 0$$

der Ort der Hauptkreise, für die

$$\frac{\sin D_1 A_1 A_2}{\sin D_1 A_1 A_3} \cdot \frac{\sin D_2 A_2 A_3}{\sin D_2 A_2 A_1} \cdot \frac{\sin D_3 A_3 A_1}{\sin D_3 A_3 A_2} = m,$$

wobei D_1, D_2, D_3 die Spuren des Hauptkreises u_1, u_2, u_3 auf den Seiten des Polarendreiecks von A_1, A_2, A_3 sind.

4. Die Hauptkreise der Punkte C_1, C_2, C_3, die die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ in den Sinusverhältnissen

$$v_l = \frac{\sin A_i C_l}{\sin C_l A_k}$$

unter rechten Winkeln teilen, enthalten einen gemeinsamen Punkt x_1, x_2, x_3, wenn den Gleichungen

$$(1.) \quad \frac{a_3(x_3 + a_2' x_1)}{a_2(x_2 + a_3' x_1)} = v_1, \qquad \frac{a_1(x_1 + a_3' x_2)}{a_3(x_3 + a_1' x_2)} = v_2, \qquad \frac{a_2(x_2 + a_1' x_3)}{a_1(x_1 + a_2' x_3)} = v_3$$

durch einen Verein x_1, x_2, x_3 genügt werden kann. Dies führt auf die Bedingung

$$(2.)\quad (1+a_1'a_2'a_3')(v_1v_2v_3-1)+a_2a_3a_1'(v_2v_3-v_1)+a_3a_1a_2'(v_1v_3-v_2)$$
$$+a_1a_2a_3'(v_1v_2-v_3)=0.$$

Wenn die Hauptkreise A_iC_i einen gemeinsamen Punkt haben, so ist $v_1v_2v_3=1$, und an die Stelle von (2.) tritt

$$\frac{1}{a_1''}\left(\frac{1}{v_1}-v_1\right)+\frac{1}{a_2''}\left(\frac{1}{v_2}-v_2\right)+\frac{1}{a_3''}\left(\frac{1}{v_3}-v_3\right)=0.$$

Hieraus folgt: *Drei Teiler der Seiten des Achsendreiecks und die Gegenteiler sind immer zugleich die Koordinatenfüße eines Punktes.*

Der dual entsprechende Satz ist: *Drei Teiler der Winkel des Achsendreiecks und die Gegenteiler treffen die Seiten des Polarendreiecks immer zugleich in Punkten eines Hauptkreises.*

---

5. Bezogen auf das Dreieck XYZ der Hauptachsen, kann die Gleichung eines sphärischen Kegelschnitts in der Form angenommen werden

$$(1)\qquad K\equiv\frac{c^2}{a^2}x^2+\frac{c'^2}{a'^2}y^2-1=0.$$

Hierin sind x, y die Sinus der sphärischen Abstände des Punktes P von den Achsen YZ und XZ, $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ die halbe große Achse und der halbe Abstand der elliptischen Brennpunkte, a, c ihre Sinus, a', c' die Kosinus. Wenn φ einen Winkel bedeutet, der an die Begrenzung $\sin^2\varphi \leqq c^2$ gebunden ist, so erhält man die Koordinatensinus jedes Kegelschnittpunktes aus

$$(2.)\qquad x=\frac{a}{c}\sin\varphi,\qquad y=\frac{a'}{c'}\cos\varphi.$$

Der Bogen $\mathfrak{r}$, der P mit dem Brennpunkte $|\,c, 0, c'\,|$ verbindet, folgt aus

$$r'=cx+c'z=a\sin\varphi+a'\cos\varphi=\cos(a-\varphi);$$

mithin ist

$$(3.)\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{a}-\varphi.$$

Die Entfernung vom anderen elliptischen Brennpunkte $|-c, 0, c'\,|$ ist $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{a}+\varphi$, und man kommt so zu dem Brennstrahlensatze $\mathfrak{r}+\mathfrak{r}_1=2\mathfrak{a}$.

Der Hauptkreis der Kegelschnittspunkte φ_1 und φ_2 hat die Gleichung $(x y_1 z_2) = 0$; für den Punkt $|\, k, 0, k' \,|$, in dem er die Hauptachse schneidet, ist daher

$$(y_1 z_2) \cdot k - (y_1 x_2) \cdot k' = 0,$$

oder

$$y_1 \left(\frac{a' k}{c'} \cos \varphi_2 - \frac{a k'}{c} \sin \varphi_2 \right) = y_2 \left(\frac{a' k}{c'} \cos \varphi_1 - \frac{a k'}{c} \sin \varphi_1 \right).$$

Führt man den Hilfswinkel $\mathfrak{n}$ ein gemäß

$$\mathfrak{n}'' = \frac{a''}{c'' k''},$$

so hat man

$$y_1 \cos (\mathfrak{n} + \varphi_2) = y_2 \cos (\mathfrak{n} + \varphi_1).$$

Setzt man hier noch

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2 c'^2} (c^2 - \sin^2 \varphi),$$

so folgt für φ_1 und φ_2 der Zusammenhang

$$(1.) \qquad \frac{\cos^2 (\mathfrak{n} + \varphi_1)}{c^2 - \sin^2 \varphi_1} = \frac{\cos^2 (\mathfrak{n} + \varphi_2)}{c^2 - \sin^2 \varphi_2}.$$

Steiner hat in seiner Abhandlung: Über eine Eigenschaft der Brennstrahlen der Kegelschnitte (Dieses Journal Bd. 30, S. 337; Ges. Werke, 2. Bd., S. 350) eine andere Form dieses Zusammenhangs gegeben, die in der Übertragung auf die Kugel lautet

$$(2.) \qquad \operatorname{tang} (\mathfrak{d} + \mathfrak{r}_1) \operatorname{tang} (\mathfrak{d} + \mathfrak{r}_2) = p,$$

wobei $\mathfrak{d}$ und p nur die Dimensionen des Kegelschnitts und k enthalten. Durch goniometrische Umrechnung kann man (1.) in (2.) überführen. Auch auf der Kugel gilt die von *Steiner* für die Ebene gemachte Bemerkung, daß $\mathfrak{d}$ und p für je zwei Punkte der Hauptachse, die für den Kegelschnitt in Harmonie sind, dieselben Werte haben.

---

6. In der Abhandlung: Über einige Bestimmungsweisen usw. (Dieses Journal Bd. 45, S. 189; Ges. Werke, 2. Bd., S. 467) gab *Steiner* für ebene Kegelschnitte den Satz: Der Ort der Geraden, auf denen zwei feste Kreise Sehnen

abschneiden, die ein beständiges Verhältnis haben, ist ein bestimmter Kegelschnitt. Für die Kugel gilt der entsprechende Satz: *Der Ort der Hauptkreise, von denen zwei feste Kreise Sehnen abschneiden, für deren Hälften die trigonometrischen Tangenten ein beständiges Verhältnis haben, ist ein bestimmter Kegelschnitt.*

Haben die Kreise die Mitten $|c_1, 0, c_1'|$, $|c_2, 0, c_2'|$, **und die Halbmesser** $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$, **schneiden sie ferner von** $|u, v, w|$ **die Sehnen** $2\mathfrak{l}_1, 2\mathfrak{l}_2$ **ab, so ist, wenn** n **das Verhältnis bezeichnet,**

$$(1.)\qquad l_2'' = n\, l_1'', \qquad l_2\, l_1' = n\, l_1\, l_2'.$$

Hat $|u, v, w|$ **von den Kreismitten die Abstände** $\mathfrak{a}_1$ **und** $\mathfrak{a}_2$, **so ist**

$$l_1' = \frac{r_1'}{a_1'}, \qquad l_2' = \frac{r_2'}{a_2'},$$

daher folgt aus (1.)

$$(a_2'^2 - r_2'^2)\, r_1'^2 = n^2 (a_1'^2 - r_1'^2)\, r_2'^2.$$

Nun ist bekanntlich

$$a_1 = c_1 u + c_1' w, \qquad a_2 = c_2 u + c_2' w,$$

daher hat man schließlich als Gleichung des Ortes in Hauptkreiskoordinaten

$$r_1'^2\, [(c_2 u + c_2' w)^2 - r_2^2] = n^2 r_2'^2\, [(c_1 u + c_1' w)^2 - r_1^2],$$

das Glied $2uw$ **verschwindet, wenn**

$$\frac{\sin 2\,\mathfrak{c}_2}{\sin 2\,\mathfrak{c}_1} = \frac{n^2 r_2'^2}{r_1'^2}.$$

Teilt man also den doppelten Abstand der Kreismitten im Sinusverhältnisse $n^2 r_2'^2 : r_1'^2$ **und halbiert die Teile, so erhält man die Abstände der auf** $M_1 M_2$ **liegenden Mitte des Kegelschnitts von den Punkten** M_1 **und** M_2. **Bezogen auf die Hauptachsen kommt dem Kegelschnitte die Gleichung zu**

$$r_1'^2 (c_2^2 u^2 + c_2'^2 w^2 - r_2^2) - n^2 r_2'^2 (c_1^2 u^2 + c_1'^2 w^2 - r_1^2) = 0.$$

Die Kegelschnitte, die verschiedenen Werten von n **zugehören, bilden eine Schar, an der die beiden gegebenen Kreise als besondere Glieder teilnehmen, für** $n = 0$ **und** $n = \infty$.

Ebenso erhält man: *Der Ort der Punkte, von denen aus zwei gegebene Kreise unter Winkeln aufgenommen werden, für deren Hälften die trigonometrischen Tangenten ein gegebenes Verhältnis n haben, ist ein bestimmter sphärischer Kegelschnitt.* Die Kegelschnitte, die zu den verschiedenen Werten von n gehören, bilden ein Büschel, an dem die gegebenen Kreise als besondere Glieder für $n = 0$ und n-∞ teilnehmen.

---

7. Ein sphärischer Kegelschnitt ist durch eine Leitlinie L und zwei berührende Hauptkreise T_1 und T_2 noch nicht völlig bestimmt. Die Gleichung des *Ortes für den zu L gehörigen Brennpunkt F* ergibt sich in folgender Weise. Sind P_1, P_2 die Berührungspunkte von T_1 und T_2 mit einem zu L, T_1, T_2 gehörigen Kegelschnitte, ist ferner ε seine numerische Exzentrizität, so ist

$$(1.)\qquad \varepsilon = \frac{\sin P_1 F}{\sin P_1 Q_1} = \frac{\sin P_2 F}{\sin P_2 Q_2},$$

wenn $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ senkrecht zu L vorausgesetzt werden. Sind A_1 und A_2 die Spuren von T_1 und T_2 auf L, so sind die Kugeldreiecke $P_1 F A_1$ und $P_2 F A_2$ bei F rechtwinklig; in Rücksicht auf (1.) hat man daher

$$(2.)\qquad \frac{\sin F A_1 P_1}{\sin A_1} = \frac{\sin F A_2 P_2}{\sin A_2}.$$

Bezeichnet man die Sinus und Kosinus der Winkel des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (wobei A_3 der Schnittpunkt von T_1 und T_2 ist) mit a_1, a_2, a_3; a_1', a_2', a_3', und hat F für das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ die Koordinaten x_1, x_2, x_3, so ist

$$\sin^2 F A_1 P_1 = \frac{a_1^2 x_2^2}{x_2^2 + x_3^2 + 2 a_1' x_2 x_3}, \qquad \sin^2 F A_2 P_2 = \frac{a_2^2 x_1^2}{x_3^2 + x_1^2 + 2 a_2' x_3 x_1};$$

daher folgt aus (2.)

$$x_2^2 (x_3^2 + x_1^2 + 2 a_2' x_3 x_1) = x_1^2 (x_2^2 + x_3^2 + 2 a_1' x_2 x_3),$$

oder einfacher

$$(3.)\qquad C \equiv (x_1^2 - x_2^2)\, x_3' + 2\, x_1 x_2 (a_1' x_1 - a_2' x_2) = 0.$$

Für die sphärischen Kegelschnitte, die eine Leitlinie und zwei Tangenten gemein haben, ist daher der Ort des der Leitlinie zugehörigen Brennpunktes eine bestimmte sphärische Kurve 3. Ordnung.

Die Kurve enthält die Punkte A_1 und A_2 und wird hier von den Hauptkreisen berührt

$$x_3 + 2\,a_1' x_2 = 0, \text{ bzw. } x_3 + 2\,a_2' x_1 = 0.$$

Hieraus folgt, daß die in A_1 und A_2 berührenden Hauptkreise mit T_1 und T_2 die Winkel A_1 und A_2 bilden. Aus der Gleichung des Ortes ist ferner ersichtlich, daß A_3 Doppelpunkt ist, und daß die Tangenten im Doppelpunkte die Winkel A_3 hälften. Für $x_3 = 0$ erhält man aus $C = 0$ außer $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$ noch

$$a_1' x_1 - a_2' x_2 = 0,$$

und dies ist die von A_3 auf die Leitlinie gefällte Höhe des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$; ihr Fuß liegt also auf C.

Hat das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bei A_1 und A_2 gleiche Winkel, so zerfällt C in

$$(x_1 - x_2)\left((x_1 + x_2)\,x_3 + 2\,a_1' x_1 x_2\right) = 0,$$

also in die *Höhe* des gleichschenkligen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und in den *sphärischen Kegelschnitt*

$$(4.)\qquad (x_1 + x_2)\,x_3 + 2\,a_1' x_1 x_2 = 0.$$

In der Ebene gilt unter übrigens gleichen Umständen die Ortsgleichung $C = 0$ unverändert. Die Gleichung (4.) stellt dann den dem Achsendreiecke umschriebenen Kreis dar. Auf der Kugel hat dieser Kreis die Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A_1 A_3 \cdot (x_1 + x_2)\,x_3 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A_1 A_2 \cdot x_1 x_2 = 0,$$

fällt also nicht mit (4.) zusammen. Die Hauptkreise, die $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ in A_1 bzw. A_2 rechtwinklig schneiden, haben unter der Voraussetzung $A_1 = A_2$ die Gleichungen

$$x_3 + a_1' x_1 = 0, \qquad x_3 + a_1' x_2 = 0.$$

Setzt man die hieraus für x_1 und x_2 folgenden Werte in (4.) ein, so wird (4.) identisch; daher ist (4.) ein *rechtwinkliger* Kegelschnitt, d. i. der Ort der Scheitel aller rechtwinkligen sphärischen Dreiecke über der gemeinsamen Hypotenuse $A_1 A_2$.

In der Ebene enthält die Kurve (3.) die imaginären Kreispunkte; daher ist hier ein Kegelschnitt durch eine Leitlinie und drei Tangenten fünfdeutig bestimmt.

Dual entspricht: Für die sphärischen Kegelschnitte, die einen Leitpunkt G und zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 haben, ist der Ort der zu G gehörigen *Brennkreise* (sonst Asymptoten genannt) die kubische Kurve

$$\mathfrak{S} \equiv (u_1^2 - u_2^2)\, u_3 - 2\, u_1\, u_2\, (l_1'\, u_1 - l_2'\, u_2) = 0,$$

wobei $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ die Seiten $P_2 G$ und $P_1 G$ des Achsendreiecks $G P_1 P_2$ bezeichnen.

Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen.

Von Herrn *Oskar Perron* in München.

Die Frage, ob eine gegebene algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten reduzibel oder irreduzibel ist im Bereich der rationalen Zahlen, kann *theoretisch* stets beantwortet werden. Denn es gibt mehrere allgemeine Methoden, die in jedem Fall nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziel führen müssen. *Praktisch* aber sind die erforderlichen Rechnungen wegen ihrer Länge meist unausführbar, und man muß sich daher nach anderen Mitteln umsehen. Da ist vor allem wichtig, daß vielfach die Irreduzibilität einer Gleichung schon von vornherein aus gewissen Eigenschaften ihrer Koeffizienten gefolgert werden kann; für die bis jetzt bekannten Kriterien dieser Art habe ich vor kurzem eine rationelle Beweismethode angegeben und einige weitere neu aufgestellt, die aus derselben Quelle fließen.*) Bei all diesen Sätzen bezogen sich die fraglichen Eigenschaften der Koeffizienten auf die *Teilbarkeit*, aber ebenso nützlich werden Kriterien sein, die aus *Größenbeziehungen* zwischen den Koeffizienten die Irreduzibilität erkennen lassen. Die Herleitung derartiger Theoreme auf Grund einfacher Prinzipien ist der Zweck der folgenden Zeilen. Im III. Abschnitt folgt dann kurz eine analoge Deduktion für solche Gleichungen, deren Koeffizienten selbst rationale Funktionen von einer oder mehr Variabeln sind.

*) Über eine Anwendung der Idealtheorie usw. Math. Annal. Bd. 60. Zu etwas allgemeineren Resultaten ist neuerdings Herr *G. Dumas* gelangt: Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels, Journal de math. pures et appl. VI. série, t. 2, 1906.

I.

1. Die algebraische Gleichung sei in der Form angenommen:

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo die Koeffizienten $a_1, \ldots a_n$ *ganze* rationale Zahlen sind, und selbstverständlich $a_n \gtrless 0$. Eine solche Gleichung kann bekanntlich nur in der Weise zerfallen, daß die Koeffizienten der Faktoren wieder *ganze* Zahlen sind. Die in diesem Abschnitt zu beweisenden Sätze beruhen nun auf folgendem einfachen Prinzip:

Die Gleichung $f(x) = 0$ ist gewiß irreduzibel, wenn die absoluten Werte von $n-1$ ihrer Wurzeln kleiner als 1 sind.

Würde nämlich $f(x)$ zerfallen, so müßte jedenfalls einer der Faktoren lauter Wurzeln haben, die absolut kleiner als 1 sind, während doch ihr Produkt gleich dem letzten Koeffizienten des betreffenden Faktors, also eine ganze Zahl und somit $\geqq 1$ sein muß.

Wie leicht zu sehen, bleibt der Satz auch dann noch richtig, wenn es sich um Irreduzibilität in bezug auf einen imaginären quadratischen Körper handelt, wobei die Koeffizienten $a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen eben dieses Körpers bedeuten dürfen.

2. Zunächst mögen $a_1, \ldots a_n$ beliebige (komplexe) Zahlen sein, und es werde zur Abkürzung im folgenden durchweg

$$(1.) \qquad |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = A$$

gesetzt. Dann beweise ich folgenden

Hilfssatz I. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel α hat, welche den Ungleichungen

$$|\alpha| \geqq 1,$$
$$|a_1 + \alpha| > A + 1 - |a_1| - |\alpha|$$

genügt, so ist notwendig auch $|\alpha| > 1$, aber die $n-1$ andern Wurzeln von $f(x)$ sind alle absolut < 1.

Zum Beweis führe man die Funktionen

$$f_0(x) = 1,$$
$$f_1(x) = x + a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}(x) = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$
$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = f(x)$$

ein, für welche die Rekursionsformel

(2.) $$x f_i(x) + a_{i+1} = f_{i+1}(x) \qquad (i=0, 1, \dots n-1)$$

gilt. Ist dann α eine Wurzel von $f(x)$, die die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, so ist $f_n(\alpha) = 0$; außerdem sei zur Abkürzung

(3.) $$|f_1(\alpha)| + |f_2(\alpha)| + \cdots + |f_{n-1}(\alpha)| = \lambda$$

gesetzt. Vermöge (2.) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} |\alpha|\,\lambda &= |-a_2 + f_2(\alpha)| + |-a_3 + f_3(\alpha)| + \cdots + |-a_n + f_n(\alpha)| \\ &\leqq |a_2| + |f_2(\alpha)| + |a_3| + |f_3(\alpha)| + \cdots + |a_n| + |f_n(\alpha)| \\ &= A - |a_1| + \lambda - |f_1(\alpha)|, \end{aligned}$$

oder auch

(4.) $$(|\alpha| - 1)\,\lambda \leqq A - |a_1| - |a_1 + \alpha|.$$

Nun ist nach Voraussetzung $|\alpha| \geqq 1$. Wäre etwa $|\alpha| = 1$, so ginge die zweite der im Hilfssatz vorausgesetzten Ungleichungen über in: $0 > A - |a_1| - |a_1 + \alpha|$, während dagegen aus (4.) $0 \leqq A - |a_1| - |a_1 + \alpha|$ hervorgeht. Da somit $|\alpha| = 1$ nicht möglich ist, so muß notwendig $|\alpha| > 1$ sein und der erste Teil unserer Behauptung ist damit bewiesen. Dann darf aber (4.) durch $|\alpha| - 1$ dividiert werden und mit Rücksicht auf die zweite unserer Voraussetzungen erhält man

$$\lambda \leqq \frac{A - |a_1| - |a_1 + \alpha|}{|\alpha| - 1} < 1.$$

Angenommen, die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} \equiv x^{n-1} + f_1(\alpha)\,x^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\alpha) = 0$$

hätte noch eine Wurzel β vom Betrag $|\beta| \geqq 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\beta|^{n-1} &= |f_1(\alpha)\beta^{n-2} + f_2(\alpha)\beta^{n-3} + \cdots + f_{n-1}(\alpha)| \\ &\leqq |f_1(\alpha)|\,|\beta|^{n-2} + |f_2(\alpha)|\,|\beta|^{n-3} + \cdots + |f_{n-1}(\alpha)| \leqq \lambda\,|\beta|^{n-2}. \end{aligned}$$

Also ist $|\beta| \leqq \lambda$, und es müßte wegen $|\beta| \geqq 1$ auch $\lambda \geqq 1$ sein, was dem oben bewiesenen widerspricht. Hilfssatz I ist damit in allen Teilen bewiesen.

3. Sind jetzt die Koeffizienten $a_1, \dots a_n$ wieder *ganze rationale* Zahlen, so hat $f(x)$ jedenfalls eine Wurzel α, deren Betrag $|\alpha| \geqq 1$ ist. Genügt

α außerdem noch der Ungleichung

$$(5.)\qquad |a_1 + \alpha| > A + 1 - |a_1| - |\alpha|,$$

so sind nach Hilfssatz I alle anderen Wurzeln absolut < 1, und folglich ist Ungleichung (5.) nach dem in 1. aufgestellten Prinzip eine für die Irreduzibilität von $f(x)$ hinreichende Bedingung. Da $|a_1 + \alpha| \geqq |a_1| - |\alpha|$, so wird (5.) gewiß erfüllt sein, wenn man

$$|a_1| - |\alpha| > A + 1 - |a_1| - |\alpha|, \text{ d. h. } |a_1| > 1 + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

fordert, und daraus entspringt sogleich

Theorem I. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Ungleichung

$$|a_1| < 1 + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

*genügen, so ist $f(x)$ irreduzibel.**)

Dieses Kriterium ist in jedem konkreten Fall leicht zu prüfen. Es bleibt auch zu Recht bestehen, wenn es sich um Irreduzibilität in bezug auf einen imaginären quadratischen Körper handelt. Jetzt soll noch untersucht werden, inwieweit in der geforderten Ungleichung auch das Gleichheitszeichen zulässig ist, wobei ich mich aber auf Irreduzibilität im Gebiet der rationalen Zahlen beschränke. Es sei also

$$(6.)\qquad |a_1| = 1 + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

Angenommen, $f(x)$ habe jetzt eine Wurzel γ vom Betrage $|\gamma| =$ Dann verträgt sich die Gleichung

$$a_1 \gamma^{n-1} = -(\gamma^n + a_2 \gamma^{n-2} + a_3 \gamma^{n-3} + \cdots + a_n)$$

nur dann mit der geforderten Gleichheit, wenn rechts jedes Glied, und also auch die linke Seite reell ist, daher müssen insbesondere γ^n und γ^{n-1} reell sein, woraus $\gamma = \pm 1$ folgt. In der Tat kann $f(x)$ bei der Annahme (6.) eine der Zahlen ± 1 als Wurzel haben, und ist dann reduzibel. Ist dies aber nicht der Fall, so ist überhaupt keine Wurzel vom Betrag 1 vorhanden, und daher ist wenigstens eine Wurzel, sie sei wieder α, absolut > 1. Dann darf man wieder (4.) durch $|\alpha| - 1$ dividieren, und da aus (6.) auch die Ungleichung (5.) hervorgeht, aber eventuell mit Gleichheitszeichen, so ergibt

*) Einen sehr speziellen Fall dieses Satzes fand ich bereits auf anderem Wege in meiner Habilitationsschrift: *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus* (Math. Ann., Bd. 64).

sich $\lambda \leqq 1$. Da nun, wie in 2. gezeigt ist, der Betrag einer jeden Wurzel β von $\frac{f(x)}{x-\alpha}$, der etwa $\geqq 1$ ausfiele, gewiß auch $< \lambda$ also $\leqq 1$ sein muß; da ferner Wurzeln vom Betrag $= 1$ nicht existieren: so muß notwendig $|\beta| < 1$ sein, woraus wieder die Irreduzibilität von $f(x)$ folgt. Wir sprechen dieses Ergebnis in folgender Weise aus:

Zusatz I. Das Theorem I bleibt richtig, wenn in der dort angegebenen Ungleichung das Gleichheitszeichen steht, sofern dann nur $f(\pm 1) \neq 0$ *ist.*

4. Da auch $|a_1 + \alpha| \geqq |\alpha| - |a_1|$, so ist die Ungleichung (5.) wieder a fortiori erfüllt, wenn die Beziehung

$$|\alpha| - |a_1| > A + 1 - |a_1| - |\alpha|, \text{ d. h. } |\alpha| > \frac{A+1}{2}$$

besteht; also auch in diesem Fall ist $f(x)$ irreduzibel, und zwar wieder selbst dann, wenn es sich um Irreduzibilität in bezug auf einen imaginären quadratischen Körper handelt. Von jetzt ab will ich mich indes auf den natürlichen Rationalitätsbereich beschränken. Um unter dieser Voraussetzung aus dem letzten Kriterium ein besseres zu gewinnen, das die Wurzel α nicht mehr enthält, bemerke man, daß α als einzige Wurzel, deren Betrag > 1 ist, notwendig reell sein muß. Da ferner $\frac{A+1}{2} \geqq 1$, so ist, falls α positiv, dies die *einzige* Wurzel zwischen $\frac{A+1}{2}$ und $+\infty$; falls α negativ, ist es die *einzige* Wurzel zwischen $-\frac{A+1}{2}$ und $-\infty$. Daher ist

$$f\left(\frac{A+1}{2}\right) < 0$$

im ersten, und

$$(-1)^n f\left(-\frac{A+1}{2}\right) < 0$$

im zweiten Fall.

Umgekehrt, wenn eine dieser Ungleichungen erfüllt ist, so ist auch eine Wurzel α vorhanden, die absolut größer als $\frac{A+1}{2}$ wird, und daraus folgt

Theorem II. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ einer der beiden Ungleichungen

$$f\left(\frac{A+1}{2}\right) < 0, \text{ oder } (-1)^n f\left(-\frac{A+1}{2}\right) < 0$$

genügen, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Durch Beispiele überzeugt man sich leicht, daß dieses Kriterium auch in solchen Fällen eine Entscheidung liefert, in denen das erste versagt. Da aber, wenn A eine nur einigermaßen große Zahl ist, die Prüfung schon einen ziemlichen Aufwand an Rechnung erfordert, so bemerke man zur Vermeidung unnötiger Rechnungen folgendes: Da durch die Bedingungen des Theorems zunächst die Ungleichung (5.) und hierdurch nach dem für Hilfssatz I gegebenen Beweise auch $\lambda < 1$ erzwungen wird, so ist

$$|a_1 + \alpha| \equiv |f_1(\alpha)| < \lambda < 1,$$

und folglich $|\alpha|$ zwischen $|a_1| - 1$ und $|a_1| + 1$ eingeschlossen. Damit also $|\alpha| > \frac{A+1}{2}$ ausfallen kann, muß jedenfalls auch

$$|a_1| + 1 > \frac{A+1}{2}, \text{ d. h. } |a_1| > |a_2| + \cdots + |a_n| - 1$$

sein. Andererseits wird für $|a_1| \geqq |a_2| + \cdots + |a_n| + 1$ bereits nach Theorem I und Zusatz I die Irreduzibilität erkannt, so daß das Theorem II bloß noch für den Fall $|a_1| = |a_2| + \cdots + |a_n|$ in Betracht kommt. Ferner erkennt man, daß a_1 und α von entgegengesetztem Zeichen sind, weil sonst $|a_1 + \alpha| > 1$ sein müßte, was dem Obigen widerspricht. Diese Ergebnisse fasse ich zusammen in

Zusatz II. Die Prüfung des in Theorem II ausgesprochenen Kriteriums kann nur dann von besserem Erfolg sein als Theorem I und Zusatz I, wenn die Beziehung

$$|a_1| = |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

statthat. Dabei braucht man nur die erste oder nur die zweite der angegebenen Ungleichungen zu prüfen, je nachdem a_1 negativ oder positiv ist.

II.

1. Als weiteres Prinzip zur Gewinnung von Irreduzibilitätskriterien kann folgendes dienen:

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ ein Paar komplex-konjugierter Wurzeln hat und die $n-2$ andern Wurzeln absolut < 1 sind, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Der Beweis ist wörtlich so zu führen wie oben.

A und λ mögen ihre frühere Bedeutung behalten; $\alpha, \bar{\alpha}$ sei ein komplex-konjugiertes Wurzelpaar von $f(x)$. Da der Hilfssatz I für Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten gilt, so wollen wir ihn anwenden auf die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} \equiv x^{n-1} + f_1(\alpha)x^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\alpha) = 0$$

mit der Wurzel $\bar{\alpha}$. An Stelle von a_1 tritt dann $f_1(\alpha) = a_1 + \alpha$; an Stelle von A tritt λ. Wenn daher die Wurzel $\bar{\alpha}$ den Ungleichungen

$$|\bar{\alpha}| \geqq 1; \ |a_1 + \alpha + \bar{\alpha}| > \lambda + 1 - |a_1 + \alpha| - |\bar{\alpha}|$$

genügt, so ist $|\bar{\alpha}| > 1$ und die $n-2$ Wurzeln, die $f(x)$ außer $\alpha, \bar{\alpha}$ noch hat, sind absolut < 1; daher $f(x)$ irreduzibel. Die zweite dieser Ungleichungen ist wieder a fortiori erfüllt, wenn

$$(7.) \qquad |\bar{\alpha}| > \frac{\lambda+1}{2} \ \text{ oder } \ |a_1 + \alpha| > \frac{\lambda+1}{2}$$

gefordert wird. Verfolgen wir zunächst den ersten Fall. Da $|\alpha| = |\bar{\alpha}| > 1$, so ergibt sich nach (4.) eine obere Grenze für λ, und wenn man diese in die erste Ungleichung (7.) einträgt, so folgt

$$2|\alpha| > \frac{A - |a_1| - |a_1 + \alpha|}{|\alpha| - 1} + 1; \text{ d. h. } |a_1 + \alpha| > A - 1 - |a_1| + 3|\alpha| - 2|\alpha|^2$$

als eine Bedingung, die zusammen mit $|\alpha| > 1$ die Irreduzibilität von $f(x)$ gewährleistet. Sie ist gewiß erfüllt, wenn man an Stelle von $|a_1 + \alpha|$ eine kleinere Größe treten läßt, etwa $|\alpha| - |a_1|$ oder $|a_1| - |\alpha|$. Entsprechend diesen zwei Fällen erhält man

$$|\alpha|^2 - |\alpha| - \frac{A-1}{2} > 0$$

$$\text{bzw. } |\alpha|^2 - 2|\alpha| + |a_1| - \frac{A-1}{2} > 0.$$

Die erste Ungleichung ist erfüllt für

$$|\alpha| > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2A-1},$$

und dann ist auch zugleich $|\alpha| > 1$. Die zweite besteht für jedes $|\alpha|$, sobald $|a_1| \geqq \frac{A+1}{2}$; allein dieser Fall ist in Abschnitt I erledigt und hier auszuschließen.*) Für $|a_1| < \frac{A+1}{2}$ ist aber die Ungleichung erfüllt, wenn

*) Eine *imaginäre* Wurzel, die absolut > 1 wäre, kann bei $|a_1| \geqq \frac{A+1}{2}$ gar nicht existieren.

$$|\alpha| > 1 + \sqrt{\frac{A+1}{2} - |a_1|}$$

ist, und dann ist ebenfalls auch $|\alpha| > 1$. Daher folgt

Hilfssatz II. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ eine *imaginäre* Wurzel α hat, deren Betrag

$$|\alpha| > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2A-1} \text{ oder } |\alpha| > 1 + \sqrt{\frac{A+1}{2} - |a_1|}$$

ist, so ist sie irreduzibel.

Behandelt man ebenso die zweite der Ungleichungen (7.), so kommt zunächst

$$|a_1 + \alpha|(2|\alpha| - 1) > A - 1 - |a_1| + |\alpha|.$$

Indem man hier wieder $|\alpha| - |a_1|$ an Stelle von $|a_1 + \alpha|$ treten läßt, erhält man für $|\alpha|$ eine untere Grenze, die bei $|a_1| = 0$ mit der ersten in Hilfssatz II angegebenen übereinstimmt, bei $|a_1| > 0$ aber ungünstiger ausfällt als die zweite von Hilfssatz II. Dieser Fall braucht also nicht mehr berücksichtigt zu werden. Setzt man dagegen $|a_1| - |\alpha|$ an Stelle von $|a_1 + \alpha|$ in der letzten Ungleichung, so erhält man

$$|\alpha|^2 - |a_1||\alpha| + \frac{A-1}{2} < 0,$$

und dies ist erfüllt, sobald

$$a_1^2 > 2A - 2,$$

$$\frac{|a_1|}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2} < |\alpha| < \frac{|a_1|}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2}$$

ist. Da außerdem $|\alpha| > 1$ sein muß, ergibt sich folgendes Resultat:

Hilfssatz III. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Ungleichung $a_1^2 > 2A - 2$ genügen, und wenn $f(x)$ eine *imaginäre* Wurzel α hat, deren Betrag > 1 ist und zwischen den Grenzen

$$\frac{|a_1|}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2} < |\alpha| < \frac{|a_1|}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2}$$

liegt, so ist $f(x)$ irreduzibel.

2. Um aus diesen Sätzen nun solche zu gewinnen, die von α unabhängig sind, nehme man a_2 positiv an und transformiere die Gleichung $f(x) = 0$ durch die Substitution

$$(8.) \qquad x = i\sqrt{a_2}\,(y + 1) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

in die Gleichung für y:

$$\varphi(y) \equiv (y+1)^n + \frac{a_1}{i\sqrt{a_2}}(y+1)^{n-1} + \frac{a_2}{(i\sqrt{a_2})^2}(y+1)^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{(i\sqrt{a_2})^n} = 0,$$

in welcher der Koeffizient von y^n gleich 1 ist, während der Betrag des von y freien Gliedes gleich

$$\left|\frac{a_1}{i\sqrt{a_2}} + \frac{a_3}{(i\sqrt{a_2})^3} + \frac{a_4}{(i\sqrt{a_2})^4} + \cdots \frac{a_n}{(i\sqrt{a_2})^n}\right| = P \tag{9.}$$

gesetzt werden mag. Für die Folge sei $P < 1$, was sicher immer dann zutrifft, wenn a_2 im Vergleich zu den anderen Koeffizienten genügend groß ist. Die absolut kleinste Wurzel von $\varphi(y)$ (oder eine von ihnen, falls es mehrere vom kleinsten Betrag gibt) sei ϱ und die ihr vermöge der Transformation (8.) entsprechende Wurzel von $f(x)$ sei α, so daß

$$\alpha = i\sqrt{a_2}\,(1+\varrho)$$

ist. Offenbar ist $|\varrho|^n \leqq P$; eine noch kleinere obere Grenze für ϱ ergibt sich durch folgende Betrachtung: Die Gleichung $f(x) = 0$ hat auch die zu α konjugierte Wurzel

$$\bar{\alpha} = -i\sqrt{a_2}\,(1+\bar{\varrho}),$$

und wenn man diese gleich $i\sqrt{a_2}\,(1+\varrho')$ setzt, so ergibt sich $\varrho' = -2-\bar{\varrho}$ als Wurzel von $\varphi(y)$. Dann ist $|\varrho'| \geqq 2 - |\bar{\varrho}| = 2 - |\varrho| \geqq 2 - \sqrt[n]{P}$; also

$$|\varrho|^{n-1}(2-\sqrt[n]{P}) \leqq P$$

oder

$$|\varrho| \leqq \frac{P^{\frac{1}{n-1}}}{\sqrt[n-1]{2-\sqrt[n]{P}}} < P^{\frac{1}{n-1}}.$$

Man könnte durch Fortsetzung des Verfahrens noch kleinere obere Grenzen finden,*) doch will ich, da diese von komplizierterer Form würden, bei dieser stehen bleiben. Es folgt dann

$$|\alpha| = \sqrt{a_2}\,|1+\varrho| > \sqrt{a_2}\left(1 - P^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

*) Wenn ϱ_0 die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$x^{n-1}(2-x) = P$$

bedeutet, so ist $|\varrho| \leqq \varrho_0$ und ϱ_0 selbst ist kleiner als alle die gedachten oberen Grenzen.

und da $|\varrho| < P^{\frac{1}{n-1}} < 1$ ist, kann $1+\varrho$ nicht rein imaginär sein, also α nicht reell. Aus Hilfssatz II folgt daher sogleich

Theorem III. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Bedingung $a_2 > 0$ und außerdem einer der beiden Ungleichungen

$$\sqrt{a_2}\left(1 - P^{\frac{1}{n-1}}\right) \geqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2A-1}$$

oder

$$\sqrt{a_2}\left(1 - P^{\frac{1}{n-1}}\right) \geqq 1 + \sqrt{\frac{A+1}{2} - |a_1|}$$

genügen, wo P durch die Gleichung (9.) definiert ist, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Die Forderung $P < 1$ ist hierin schon ausgesprochen und braucht daher nicht eigens aufgestellt zu werden. Jede der beiden Ungleichungen ist stets erfüllt, wenn a_2 im Vergleich zu den anderen Koeffizienten sehr groß ist. Bei der Prüfung des Kriteriums an konkreten Beispielen verursacht lediglich die Berechnung von P größere Mühe; jedoch wird man in vielen Fällen schon mit einer oberflächlichen Abschätzung auskommen. Insbesondere ist nützlich zu bemerken, daß das Theorem offenbar richtig bleibt, wenn man darin P durch einen Ausdruck ersetzt, der seinem Wert nach stets größer als P, dafür aber von einfacherer Bauart ist; hierzu empfiehlt sich besonders die Größe

$$P' = \frac{|a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|}{\sqrt{a_2}}.$$

Natürlich ist aber das so modifizierte Theorem vielfach nicht mehr verwendbar, wo das ursprüngliche noch eine Entscheidung gibt.

3. Man setze $4a_2 - a_1^2$ als positiv voraus, und transformiere jetzt die Gleichung $f(x) = 0$ durch die Substitution

$$(10.) \qquad x = \left(-\frac{a_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}\right)(z+1) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

in eine Gleichung für z. Nimmt man diese in der Gestalt an, daß z^n den Koeffizienten 1 hat, so wird der Betrag des von z freien Gliedes gleich

$$(11.) \qquad \left|\frac{a_3}{b^3} + \frac{a_4}{b^4} + \cdots + \frac{a_n}{b^n}\right| = Q, \quad \text{wo } b = -\frac{a_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}.$$

Für die Folge sei $Q < 1$, was wegen $|b| = \sqrt{a_2}$ z. B. sicher der Fall sein wird, wenn a_2 im Vergleich zu $a_3, \ldots a_n$ sehr groß ist. Ist dann σ die absolut kleinste Wurzel der Gleichung für z, und α die ihr nach (10.) entsprechende

Wurzel von $f(x)$, so ist $|\sigma| \leq Q^{\frac{1}{n}} < 1$, und aus $|\alpha| = |b(1+\sigma)| = \sqrt{a_2}\,|1+\sigma|$ folgt daher

$$\sqrt{a_2}\,(1+Q^{\frac{1}{n}}) \geq |\alpha| \geq \sqrt{a_2}\,(1-Q^{\frac{1}{n}}).$$

Um die Hilfssätze II und III anwenden zu können, ist noch dafür Sorge zu tragen, daß α *nicht reell* wird. Es sei daher $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$; dann ist

$$\alpha = \left(-\frac{a_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}\right)(1 + \sigma_1 + i\sigma_2),$$

und dies wird nur dann reell, wenn die Gleichheit

$$\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{a_1} = \frac{\sigma_2}{1+\sigma_1}$$

statthat. Nun ist aber $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = |\sigma|^2 \leq Q^{\frac{2}{n}}$, und hieraus folgt

$$\left|\frac{\sigma_2}{1+\sigma_1}\right| \leq \frac{\sqrt{Q^{\frac{2}{n}} - \sigma_1^2}}{1-|\sigma_1|} \leq \frac{Q^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-Q^{\frac{2}{n}}}}.^{*)}$$

Wenn daher noch die Bedingung gefordert wird

$$\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{|a_1|} > \frac{Q^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-Q^{\frac{2}{n}}}},$$

so kann die Wurzel α gewiß nicht reell sein. Aus Hilfssatz II folgt also:

Theorem IV. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Ungleichung

$$\frac{4a_2 - a_1^2}{a_1^2} > \frac{Q^{\frac{2}{n}}}{1-Q^{\frac{2}{n}}}$$

und außerdem noch einer der beiden Bedingungen

$$\sqrt{a_2}\left(1-Q^{\frac{1}{n}}\right) > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2A-1}$$

oder

$$\sqrt{a_2}\left(1-Q^{\frac{1}{n}}\right) > 1 + \sqrt{\frac{A+1}{2}} - |a_1|$$

---

*) Der Ausdruck rechts ist das Maximum des mittleren, wenn $|\sigma_1|$ zwischen 0 und $Q^{\frac{1}{n}}$ variiert.

genügen, wo Q durch die Gleichung (11.) *definiert ist, so ist $f(x)$ irreduzibel.*

Analog folgt aus Hilfssatz III:

Theorem V. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ die Bedingungen

$$a_1^2 > 2A - 2,$$

$$\frac{4a_2 - a_1^2}{a_1^2} > \frac{Q^{\frac{2}{n}}}{1 - Q^{\frac{2}{n}}},$$

$$\frac{|a_1|}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2} < \sqrt{a_2}\left(1 - Q^{\frac{1}{n}}\right) < \sqrt{a_2}\left(1 + Q^{\frac{1}{n}}\right) < \frac{|a_1|}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2}$$

erfüllen, wo Q durch die Gleichung (11.) *definiert ist, so ist $f(x)$ irreduzibel.*

Die Forderung $Q < 1$ braucht in beiden Sätzen wieder nicht eigens erhoben zu werden, da sie durch die verlangten Ungleichungen schon involviert wird; ebenso ist die Bedingung $|\alpha| > 1$, welche nach Hilfssatz III in dem Theorem V noch gefordert werden muß, stets von selbst erfüllt, da, wie unschwer einzusehen, schon

$$\frac{|a_1|}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 2A + 2} > 1$$

wird. Die Bedingungen von Theorem IV sind wieder stets erfüllt, wenn a_2 im Vergleich zu den übrigen Koeffizienten sehr groß ist; die Verwendbarkeit des Satzes reicht aber, da Q von a_1 nicht abhängt und somit für a_1 ein größerer Spielraum bleibt, über die von Theorem III hinaus. Auch zu Theorem V findet man leicht Beispiele; die betreffenden Bedingungen sind insbesondere stets erfüllt, wenn $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $|a_1|$ sehr groß im Vergleich zu $|a_n|$ und a_2 ungefähr gleich $\left(\frac{1 + |a_1|}{2}\right)^2$ ist. Beide Theoreme bleiben wieder richtig, wenn man darin Q durch einen dem Wert nach größeren, dafür aber einfacher gebauten Ausdruck ersetzt, etwa durch

$$Q' = \frac{|a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|}{a_2\sqrt{a_2}}.$$

4. Nach den Theoremen III und IV ist $f(x)$ irreduzibel, wenn a_2 positiv und im Vergleich zu den anderen Koeffizienten genügend groß ist. Zu einer genaueren Präzisierung dieses „genügend groß" gelangt man durch die folgende Fragestellung:

Gibt es eine von den Koeffizienten a_i unabhängige positive Zahl ε von der Art, daß die alleinige Bedingung

$$P' \leqq \varepsilon^{n-1},$$

wo P' die auf Seite 297 angegebene Bedeutung hat, die Irreduzibilität von $f(x)$ gewährleistet?

Nach Theorem III ist dies jedenfalls dann der Fall, wenn die gleiche Zahl ε auch noch die Ungleichung erfüllt:

$$\sqrt{a_2}\,(1-\varepsilon)-\tfrac{1}{2} \geqq \tfrac{1}{2}\sqrt{2A-1}.$$

Hier kommt a_2 sowohl auf der linken, als (in A) auf der rechten Seite vor. Durch Quadrieren entsteht eine in $\sqrt{a_2}$ quadratische Ungleichung, und wenn man diese nach $\sqrt{a_2}$ auflöst, so folgt*)

$$\text{(12.)}\qquad \sqrt{a_2} \geqq \frac{1-\varepsilon+\sqrt{(1-\varepsilon)^2+[2(1-\varepsilon)^2-1](B-1)}}{2(1-\varepsilon)^2-1},$$

wobei $B = |a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|$ ist.

Die rechte Seite in (12.) ist offenbar kleiner als

$$\frac{1+\sqrt{B}}{2(1-\varepsilon)^2-1},$$

die linke wegen $\frac{B}{\sqrt{a_2}} = P' \leqq \varepsilon^{n-1}$ mindestens gleich $\frac{B}{\varepsilon^{n-1}}$. Daher ist Ungleichung (12.) a fortiori befriedigt, wenn für ε die Bedingung

$$\frac{B}{\varepsilon^{n-1}} \geqq \frac{1+\sqrt{B}}{2(1-\varepsilon)^2-1}$$

oder

$$\varepsilon^{n-1} \leqq \frac{B}{1+\sqrt{B}}(2\varepsilon^2-4\varepsilon+1)$$

gefordert wird. Nun hat die Gleichung

$$\text{(13.)}\qquad x^{n-1} = \frac{B}{1+\sqrt{B}}(2x^2-4x+1)$$

genau *eine* Wurzel zwischen 0 und $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$; denn läßt man x von 0 bis $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ wachsen, so nimmt die linke Seite von 0 aus zu, die rechte gegen 0 hin ab. Bezeichnet man diese Wurzel mit ε_0, so zeigt die vorstehende

*) Dabei ist $2(1-\varepsilon)^2-1$ als positiv vorausgesetzt, also ε bereits kleiner als $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Deduktion, daß die Bedingung $P' \leqq \varepsilon_0^{n-1}$ für die Irreduzibilität von $f(x)$ hinreicht. Da $B \geqq 1$, so ist

$$\frac{B}{1+\sqrt{B}} \geqq \frac{1}{2},$$

und folglich wird für $x = \frac{1}{4}$ die linke Seite von (13.) kleiner oder höchstens gleich der rechten, sowie nur $n \geqq 3$ ist; daher ist $\varepsilon_0 \geqq \frac{1}{4}$. Aus demselben Grund folgt sogar $\varepsilon_0 \geqq \frac{2}{7}$ für $n \geqq 5$. Dies zusammengefaßt ergibt

Theorem VI. Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ die Ungleichung

$$\sqrt{a_2} \geqq 4^{n-1}(|a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|)$$

befriedigen, so ist $f(x)$ irreduzibel.) Ist $f(x)$ mindestens vom fünften Grad, so genügt sogar die Ungleichung*

$$\sqrt{a_2} \geqq \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\left(|a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|\right).$$

Nach der Herleitung des Theorems ist klar, daß es von geringerer Tragweite ist als III; es ist aber für die Anwendung *bequemer*. Versucht man auf demselben Wege aus der zweiten der in Theorem III gebotenen Möglichkeiten oder aus Theorem IV ebenfalls bequemere Kriterien herzuleiten, so ergibt sich kein Resultat, das über vorstehendes hinausginge und auch wirklich bequemer wäre als Theorem III bzw. IV.

III.

1. Um die vorstehend entwickelten Methoden auf Gleichungen zu übertragen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von einer oder mehr Variabeln sind, sei

$$(14.) \qquad f(x,y) \equiv y^n + g_1(x)y^{n-1} + \cdots + g_{n-1}(x)y + g_n(x) = 0$$

eine solche Gleichung; ihre Koeffizienten $g_1(x), \ldots g_n(x)$ *ganze* rationale Funktionen zunächst nur *einer* Variabeln x. Der Begriff Irreduzibilität soll stets in dem Sinne verstanden werden, daß die bei einer Zerfällung zulässigen Zahlkoeffizienten nicht einem begrenzten Rationalitätsbereich angehören müssen, sondern keiner Beschränkung unterliegen. $f(x,y)$ ist dann stets reduzibel,

*) Dies ist oben nur für $n \geqq 3$ bewiesen; daß der Satz aber auch für quadratische Gleichungen gilt, sieht man ohne weiteres ein.

wenn die Funktionen $g_1(x), \dots g_n(x)$ sich sämtlich auf Konstante reduzieren, oder auch wenn $g_n(x)$ identisch verschwindet; beide Annahmen sollen daher ausgeschlossen werden.

Die durch (14.) definierte Funktion y von x läßt sich auf einer n-blättrigen *Riemann*schen Fläche ausbreiten, und die Frage ist, ob diese zusammenhängt oder in mehrere getrennte Flächen zerfällt. Da einerseits y im Endlichen überall endlich bleibt, andererseits $f(x, y)$ offenbar nur in der Weise zerfallen kann, daß die Koeffizienten der Faktoren wieder *ganze* rationale Funktionen von x sind, ergibt sich leicht als Analogon zu dem in Abschnitt I aufgestellten Prinzip:

Wenn y auf $n-1$ Blättern der Riemannschen Fläche im Unendlichen endlich bleibt, so kann $f(x, y)$ allenfalls in der Weise zerfallen, daß ein von x freier Faktor sich abspaltet.

2. Die Funktion y von x wird im Unendlichen mindestens in einem Blatt unendlich; in einem solchen Blatt soll sie in der Nähe*) des Punktes $x = \infty$ mit η bezeichnet werden, so daß der Betrag von η nach Belieben groß gedacht werden kann. Es ist dann

$$\frac{f(x, y)}{y-\eta} = y^{n-1} + f_1(x, \eta)\, y^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x, \eta),$$

wobei

$$\eta^i + g_1(x)\, \eta^{i-1} + \cdots + g_i(x) = f_i(x, \eta)$$

gesetzt ist. Führt man nun die Abkürzungen ein:

$$G = |g_1(x)| + |g_2(x)| + \cdots + |g_n(x)|,$$
$$\lambda = |f_1(x, \eta)| + |f_2(x, \eta)| + \cdots + |f_{n-1}(x, \eta)|,$$

so folgt genau ebenso, wie früher Ungleichung (4.) S. 290 abgeleitet wurde,

$$(15.) \qquad \lambda \leqq \frac{G - |g_1(x)| - |g_1(x) + \eta|}{|\eta| - 1},$$

und wenn η_1 irgend einen von η verschiedenen Zweig von y in der Nähe von $x = \infty$ bezeichnet, so folgt aus $|\eta_1| \geqq 1$ gewiß $|\eta_1| \leqq \lambda$. Wenn also λ für $x = \infty$ endlich bleibt, so gilt dasselbe für η_1, also für $n-1$ Zweige der Funktion y.

*) Ich sage absichtlich nicht „in der Umgebung“; denn sollte der gedachte Punkt ($x = \infty$, $y = \infty$) ein Verzweigungspunkt sein, so ist nicht die volle Umgebung gemeint, sondern nur derjenige Teil derselben, der in *einem* Blatt liegt.

Analog den früheren Betrachtungen wird nun λ nicht nur endlich, sondern sogar kleiner als 1 bleiben, wenn

$$|g_1(x)| > |g_2(x)| + |g_3(x)| + \cdots + |g_n(x)| + 1,$$

und dies ist, da wir uns auf beliebig große Werte von x beschränken dürfen, dann der Fall, wenn der Grad von $g_1(x)$ größer ist als die Grade der übrigen $g_i(x)$. Alsdann kann aber auch kein von x freier Faktor von $f(x, y)$ abgetrennt werden; denn wäre $y - c$ ein solcher, so würde $f(x, c)$ identisch in x verschwinden müssen, während doch der Koeffizient der höchsten Potenz von x gewiß von 0 verschieden ist. $f(x, y)$ ist also in diesem Fall irreduzibel. Um auch noch den nach obigem Verfahren zweifelhaften Fall zu untersuchen, daß der Grad von $g_1(x)$ dem höchsten unter den Graden der übrigen $g_i(x)$ gerade gleichkommt, entwickle man η nach (ganzen oder gebrochenen) fallenden Potenzen von x. Nach der Definition von η muß dies möglich sein, und zwar beginnt die Entwicklung mit einem Glied $c x^{\mu}$, wo $\mu > 0$ ist. Sind $\nu_1, \ldots \nu_n$ bzw. die Gradzahlen von $g_1(x), \ldots g_n(x)$, so sind die Gradzahlen der verschiedenen Terme von $f(x, \eta)$ in (14.) der Reihe nach

$$\mu n, \quad \mu(n-1) + \nu_1, \quad \mu(n-2) + \nu_2, \cdots \mu + \nu_{n-1}, \quad \nu_n.$$

Die beiden größten dieser Zahlen müssen, da $f(x, \eta)$ identisch verschwindet, einander gleich sein. Da aber nach Voraussetzung $\nu_1 \geqq \nu_i$ $(i = 2, 3, \ldots n)$, so kann nur

$$\mu n = \mu(n-1) + \nu_1$$

sein, also $\mu = \nu_1$. Auf der rechten Seite von (15.) wird daher der Nenner unendlich wie x^{ν_1}, der Zähler gewiß nicht in höherem Grade; also bleibt jetzt ebenfalls λ endlich, und infolgedessen gilt auch das gleiche wieder von $n - 1$ Zweigen der Funktion $y(x)$. Es ist aber diesmal sehr wohl möglich, daß eine Konstante c existiert von der Art, daß $f(x, c)$ identisch in x verschwindet, und dann spaltet sich von $f(x, y)$ der Faktor $y - c$ ab. In jedem konkreten Fall ist diese Möglichkeit jedoch sehr leicht zu prüfen. Es ergibt sich somit der folgende Satz, welcher das vollständige Analogon zu Theorem I samt Zusatz I darstellt:

Theorem VII. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist in folgenden zwei Fällen gewiß irreduzibel:

1. wenn $g_1(x)$ von höherem Grade ist als die übrigen $g_i(x)$,

2. wenn der Grad von $g_1(x)$ gerade gleich dem höchsten von den Graden der übrigen $g_i(x)$ ist und zugleich keine Konstante c existiert, für die $f(x, c)$ als Funktion von x identisch verschwindet.

3. In Analogie zu der Betrachtungsweise des Abschnittes II wird unter Umständen die Irreduzibilität von $f(x, y)$ auch schon dann geschlossen werden können, wenn die Funktion $y(x)$ nur auf $n-2$ Blättern im Unendlichen endlich bleibt; hierzu ist nur noch die Gewißheit erforderlich, daß die beiden anderen Blätter zusammenhängen. Man kann aber jetzt noch weiter gehen und das Prinzip von Nr. 1 in folgender Weise ausdehnen:

Wenn y auf $n-i$ Blättern der *Riemann*schen Fläche im Unendlichen endlich bleibt, während die i übrigen Blätter im Unendlichen durch einen Verzweigungspunkt $(i-1)$-ter Ordnung zusammenhängen, so kann $f(x, y)$ allenfalls in der Weise zerfallen, daß ein von x freier Faktor sich abspaltet.

Dies Prinzip, dessen Beweis wieder eben so einfach ist, wie oben, bildet die Quelle für ein sehr allgemeines Kriterium, das ich in folgender Weise ausspreche:

Theorem VIII. Wenn sich unter den respektiven Gradzahlen $\nu_1, \ldots \nu_n$ der Funktionen $g_1(x), \ldots g_n(x)$ eine findet (ν_i), welche den Ungleichungen

$$(\alpha) \qquad \nu_i > \nu_k,$$

$$(\beta) \qquad \frac{\nu_i}{i} > \frac{\nu_k}{k}$$

genügt, wo k jede von i verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet; und wenn außerdem ν_i relativ prim ist zu i, so ist $f(x, y)$ irreduzibel. Sind aber die Ungleichungen (α) nur insoweit erfüllt, daß für gewisse Werte von k das Gleichheitszeichen an Stelle des Größerzeichens tritt, so ist für die Irreduzibilität außerdem noch erforderlich, daß keine Konstante c existiert, für die $f(x, c)$ als Funktion von x identisch verschwindet.

Bevor ich zum Beweise übergehe, sei folgendes bemerkt: Es genügt, die Ungleichungen (α) für $k > i$, (β) für $k < i$ zu fordern, da sie hieraus für die übrigen Werte von k schon von selbst folgen. Die naheliegende Frage, ob auch in (β) das Gleichheitszeichen zulässig sei, ist müßig, da die betreffende Gleichung durch die anderen Forderungen des Theorems ausgeschlossen wird. Für $k > i$ würde sie nämlich mit (α) im Widerspruch

stehen, und für $k < i$ ist sie aus dem Grunde unmöglich, weil ν_i und i relativ prim sein sollen, und also die Zahl $\frac{\nu_i}{i}$ nicht einem Bruch mit kleinerem Nenner gleich sein kann. Für $i = 1$ geht das Theorem in VII über.

Um nun das Theorem zu beweisen, sei wieder η ein Funktionszweig, der im Unendlichen unendlich wird, und zwar wie x^{μ}, so daß μ eine ganze oder gebrochene *positive* Zahl ist. Wie vorhin müssen dann wieder die beiden größten unter den Zahlen

$$(16.)\qquad \mu n,\ \ \mu(n-1)+\nu_1, \dots\quad \mu(n-i)+\nu_i, \dots\quad \mu+\nu_{n-1},\ \ \nu_n$$

einander gleich sein. Nach unseren Voraussetzungen sind aber offenbar die rechts von $\mu(n-i)+\nu_i$ stehenden Zahlen kleiner als diese. Die Gleichsetzung der beiden größten führt daher notwendig zu dem Ansatz

$$(17.)\qquad \mu(n-l)+\nu_l = \mu(n-k)+\nu_k,$$

wo $0 \leqq l < k \leqq i$; $\nu_0 = 0$ ist. Es soll gezeigt werden, daß $k = i$, $l = 0$ sein muß. Aus (17.) folgt

$$(18.)\qquad \mu = \frac{\nu_k - \nu_l}{k - l},$$

und da die Zahlen (17.) die zwei größten von (16.) sein sollen, so ist auch

$$(19.)\qquad \mu(n-l)+\nu_l \geqq \mu n,$$

$$(20.)\qquad \mu(n-k)+\nu_k \geqq \mu(n-i)+\nu_i.$$

Setzt man den Wert von μ aus (18.) in (19.) ein, so folgt leicht

$$(21.)\qquad k\nu_l \geqq l\nu_k.$$

Aus (20.) und der Voraussetzung (β) aber schließt man,

$$\frac{\nu_k - \nu_l}{k-l}(i-k)+\nu_k \geqq \nu_i > \frac{i}{k}\nu_k$$

und hieraus, wenn $k < i$ sein sollte, $k\nu_l < l\nu_k$. Da dies mit (21.) im Widerspruch steht, so ist $k < i$ unzulässig, also ist $k = i$. Wenn nun weiter $l > 0$, so folgt aus (21.): $\frac{\nu_l}{l} \geqq \frac{\nu_i}{i}$, was der Voraussetzung (β) widerspricht. Daher ist in der Tat $k = i$, $l = 0$, also

$$\mu = \frac{\nu_i}{i}.$$

Die Entwicklung von η nach fallenden Potenzen von x beginnt also mit dem Gliede $c x^{\frac{\nu_i}{i}}$, und da nach Voraussetzung ν_i und i relativ prim sind, so liegt in $x = \infty$ ein Verzweigungspunkt von mindestens $(i-1)$-ter Ordnung und die Funktion y hat mindestens i Zweige, die im Unendlichen unendlich werden wie $x^{\frac{\nu_i}{i}}$. Bezeichnet man diese Zweige mit $\eta, \eta', \dots \eta^{(i-1)}$, und setzt

$$\frac{f(x,y)}{(x-\eta)(x-\eta')\dots(x-\eta^{(k-1)})} = y^{n-k} + f_{1,k}\, y^{n-k-1} + \dots + f_{n-k,k}, \qquad (k=1,2,\dots i),$$

$$|f_{1,k}| + |f_{2,k}| + \dots + |f_{n-k,k}| = \lambda_k,$$

so folgt nach (15.)

$$\lambda_1 \leqq \frac{G - |g_1(x)| - |g_1(x) + \eta|}{|\eta| - 1} \leqq \frac{G}{|\eta| - 1},$$

und genau ebenso ergibt sich allgemein

$$\lambda_k \leqq \frac{\lambda_{k-1}}{|\eta^{(k-1)}| - 1}, \qquad (k=2,3,\dots i).$$

Da $\eta^{(k-1)}$ von derselben Ordnung unendlich wird wie $x^{\frac{\nu_i}{i}}$, bleiben also die Funktionen

$$\frac{\lambda_1}{G} |x|^{\frac{\nu_i}{i}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |x|^{\frac{\nu_i}{i}}, \dots \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} |x|^{\frac{\nu_i}{i}}$$

endlich, und dasselbe gilt daher auch von ihrem Produkt

$$\lambda_i \frac{|x|^{\nu_i}}{G} = \lambda_i \frac{|x|^{\nu_i}}{|g_1(x)| + |g_2(x)| + \dots + |g_n(x)|}.$$

Nach Voraussetzung (α) ist aber hier im Nenner die höchste vorkommende Potenz von x genau die ν_i-te, und folglich bleibt auch λ_i endlich. Die $n-i$ weiteren Zweige von y müssen aber absolut kleiner bleiben als 1 oder λ_i und bleiben daher ebenfalls endlich;*) $f(x, y)$ kann somit nur in der Art zerfallen, daß ein von x freier Faktor sich abspaltet. Dies ist

*) Übrigens kann dies auch noch auf andere Art geschlossen werden, etwa durch Konstruktion des *Newton*schen Polygons für den Punkt $x = \infty$; man findet genau i Zweige, deren Entwickelung mit der Potenz $x^{\frac{\nu_i}{i}}$ beginnt, während die $n - i$ andern Zweige mit negativen oder allenfalls der nullten Potenz beginnen, also endlich bleiben.

wieder nur dann möglich, wenn in den Ungleichungen (α) zum Teil das Gleichheitszeichen auftritt, und damit ist Theorem VIII vollständig bewiesen.

4. Die Irreduzibilität einer Gleichung

$$f(x_1, \dots x_m, y) \equiv y^n + g_1(x_1, \dots x_m) y^{n-1} + \dots + g_n(x_1, \dots x_m) = 0,$$

wo $g_1, \dots g_n$ ganze rationale Funktionen der m Variabeln $x_1, \dots x_m$ bedeuten, erledigt sich nun von selbst. Falls die Gleichung nämlich reduzibel ist, so muß sie dies auch bleiben, wenn $m-1$ von den Variabeln $x_1, \dots x_m$ durch Konstante ersetzt werden. Sie ist daher gewiß irreduzibel, wenn die Gradzahlen von $g_1, \dots g_n$ in bezug auf wenigstens *eine* Variable den Bedingungen des Theorems VIII genügen. Ist dies etwa die Variable x_1, sind aber dabei die Ungleichungen (α) nur insoweit erfüllt, daß für gewisse k das Gleichheitszeichen an Stelle des Größerzeichens tritt, so kann allerdings unter Umständen ein Faktor von $f(x_1, \dots x_m, y)$ abgespaltet werden, der zwar nicht x_1, wohl aber $x_2, \dots x_m$ enthält. Um also die Irreduzibilität gewiß behaupten zu können, wird man die Bedingungen (α) mit lauter Ungleichheitszeichen fordern müssen.

Aufruf für ein Denkmal *Abels*.

Die einzig dastehende Beteiligung seitens der Gelehrtenwelt an der hundertjährigen Gedächtnisfeier *Abel*s zeigte deutlich, wie hoch man sein grundlegendes Genie würdigte. Aus allen Gegenden der Erde waren die größten Mathematiker zusammengeströmt, um im Namen ihrer Universitäten und Akademieen sein Andenken zu ehren.

Im Begriffe, ihm ein würdiges Denkmal zu errichten, finden wir, seine Landsleute, daß die vollständig internationale Natur und Bedeutung seines Werkes uns nicht dazu berechtigt, diesem Vorhaben einen exklusiven Charakter zu geben, sondern fühlen uns vielmehr dazu verpflichtet, die Mathematiker aller Nationen zur Teilnahme und Beitragsleistung einzuladen.

Das Denkmal, das eine Höhe von 13 Meter erhalten wird, liegt bereits in Gips fertig vor und wartet bloß darauf, in Bronze gegossen zu werden. Es ist von *Gustav Vigeland,* Norwegens bedeutendstem Bildhauer, ausgeführt. Auf einer hohen Säule schweben zwei riesige Genien, die auf ihren Rücken den jungen Seher tragen, in dessen Antlitz der Künstler *Abel*s Gesichtszüge in mannhafter, stilisierter Auffassung wiedergegeben hat. Hervorragende Kunstkenner auch außerhalb Norwegens Grenzen haben ihre ungeteilte Bewunderung über das Werk ausgesprochen.

Es gilt hier, das Andenken des Mannes zu ehren, durch den Norwegen sein Bestes und sein Größtes auf dem Gebiete wissenschaftlicher Forschung aller Länder und Zeiten geleistet hat, und wir wenden uns deshalb vertrauensvoll mit unserem Anliegen an die Gelehrtenwelt.

Kristiania, im März 1907.

W. C. Brøgger. **Elling Holst.** **Fridtjof Nansen.**
Carl Størmer. **L. Sylow.** **Axel Thue.**

Beiträge sind zu senden an Herrn Professor *Carl Størmer*, Kristiania, Daalsgade 14.

Preis-Aufgabe
der
Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft
für das Jahr 1910.

Die meisten Aufgaben der Elektrostatik sind reduzierbar auf die Ermittelung der *Green*schen Massenbelegungen, und es sind daher diese Belegungen für die Theorie der Elektrostatik, sowie überhaupt für die ganze Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit.

Durch neuerdings publizierte Untersuchungen (Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W. Math.-phys. Kl. Jahrg. 1906, S. 483—558) dürfte wohl nun außer Zweifel gesetzt sein, daß in der Theorie des logarithmischen Potentials für jedwede geschlossene Kurve die dem Innen- und Außenraum entsprechenden beiden *Green*schen Belegungen reduzierbar sind auf *eine einzige* Belegung, auf die sogenannte „*Grundbelegung*", und daß Analoges auch gelte in der Theorie des *Newton*schen Potentials für jedwede geschlossene Oberfläche.

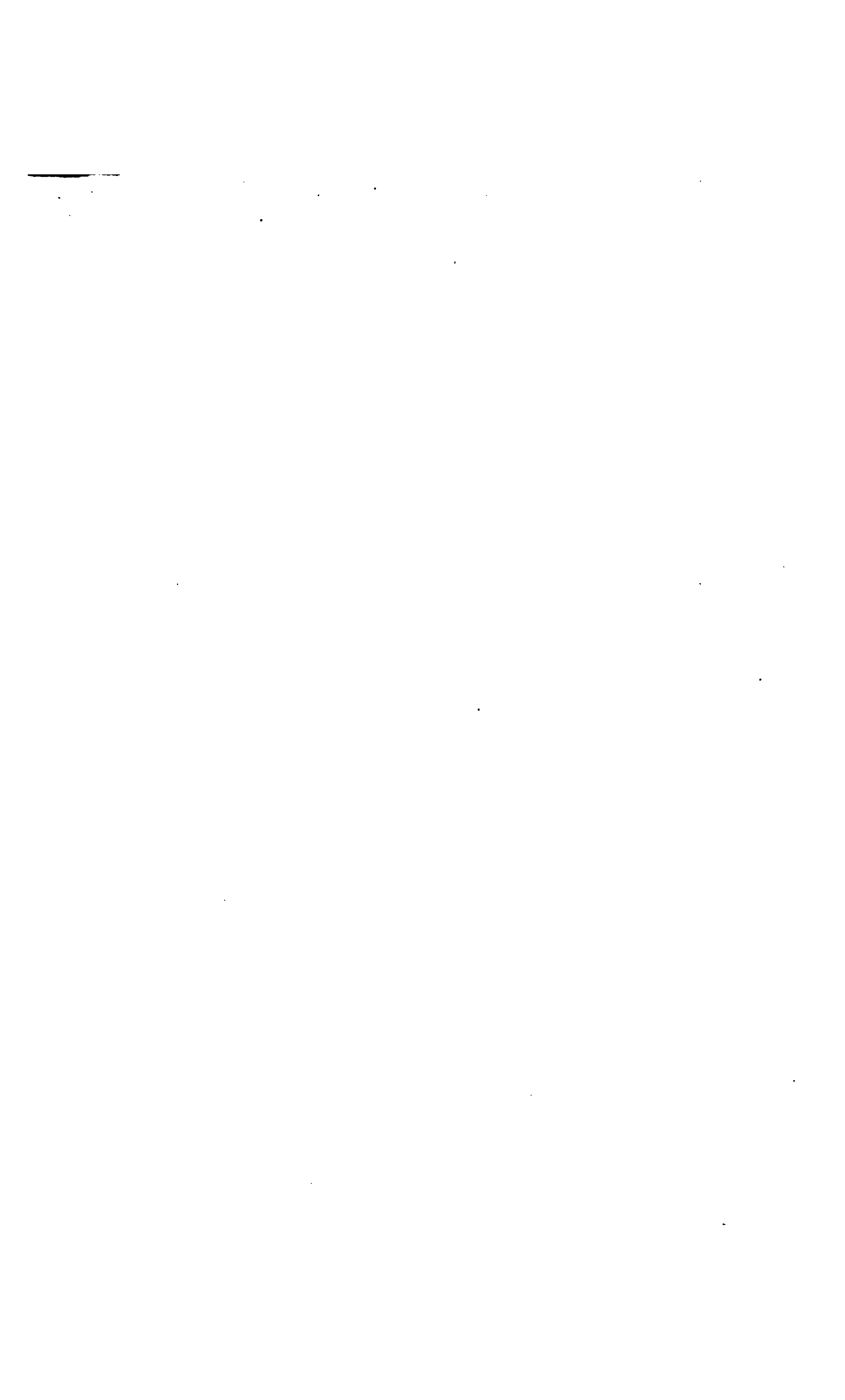
Immerhin lassen die in Rede stehenden Untersuchungen bis jetzt noch vieles zu wünschen übrig. Demgemäß stellt die Gesellschaft folgende Aufgabe:

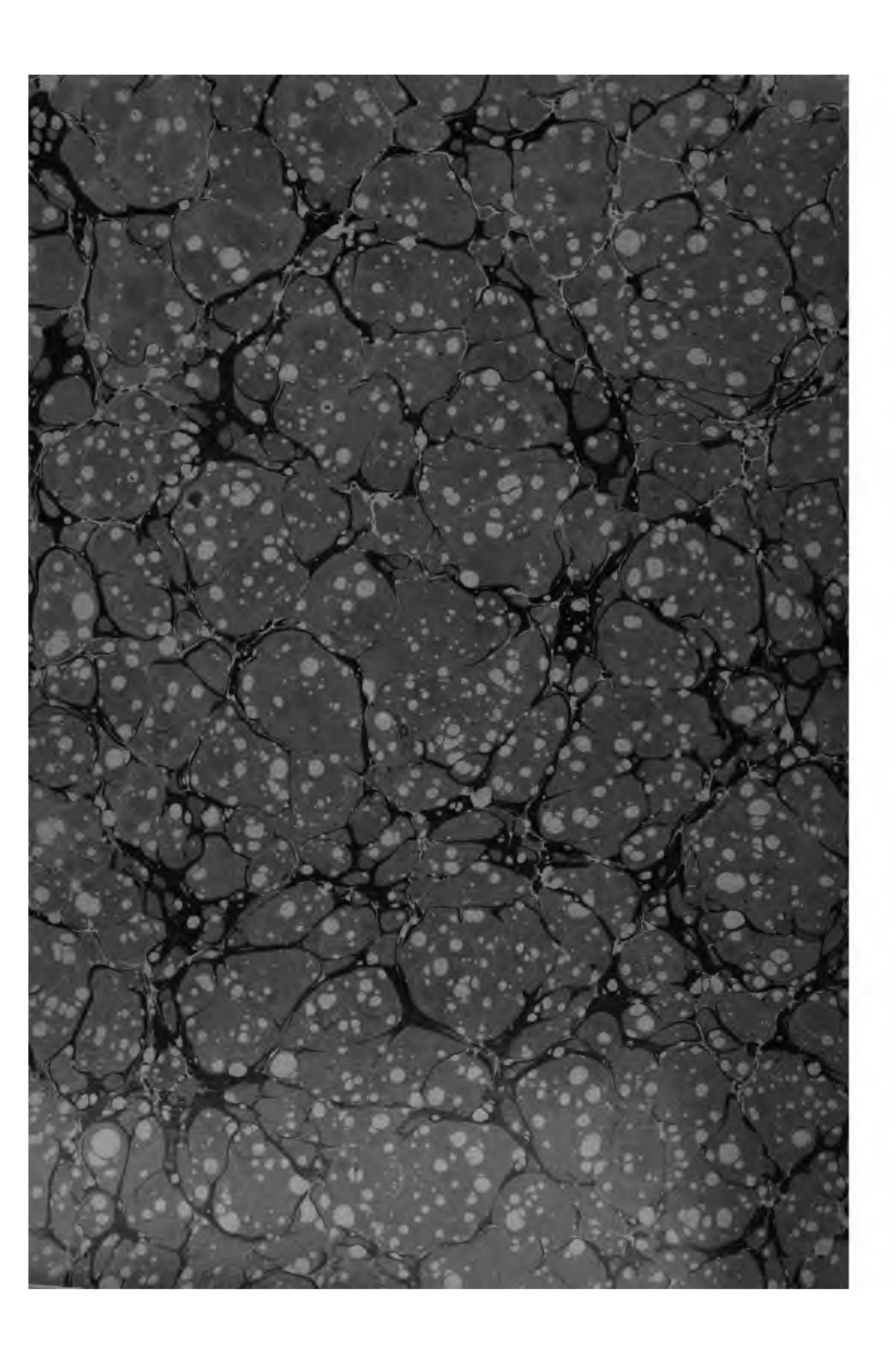
Es soll eine Arbeit geliefert werden, durch welche jene Theorie der „Grundbelegung" in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

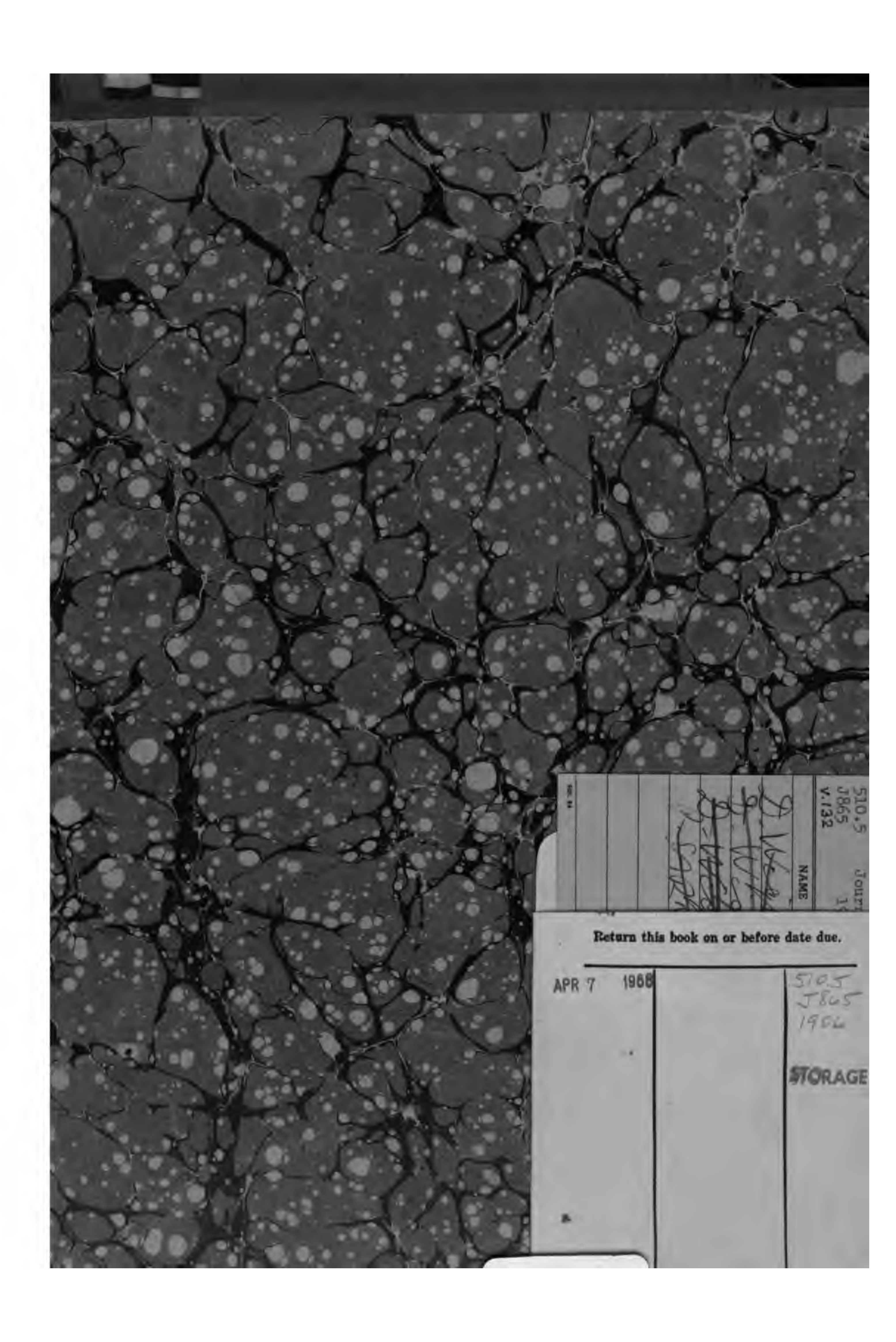
Preis 1500 Mark.

Verzeichnis der in diesem Bande vorkommenden Namen.

A






510.5
J865
v.132
NAME
Return this book on or before date due.
APR 7 1968
510.5
J865
1906
STORAGE

